Семинар 6. Тензорное произведение расширений

Определение 6.1. *Будем говорить, что коммутативное кольцо R – артиново, если оно является конечномерной алгеброй над полем.*

Артиново кольцо (алгебра) называется полупростым, если оно изоморфно прямой сумме полей.

Задача 6.1. Пусть $p_1(t),\ldots, p_n(t)$ – набор попарно различных неприводимых многочленов с коэффициентами в поле $\Bbbk$. Покажите, что $\Bbbk$-алгебра $A := \Bbbk[t]/(p_1 \ldots p_n)$ полупроста и содержит n идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, таких что $Ae_i \simeq \Bbbk[t]/(p_i)$.

Задача 6.2. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Задача 6.3. Идемпотент e в артиновом кольце A называется разложимым, если он представляется в виде суммы двух ненулевых идемпотентов. Докажите, что eA – поле, если и только если e – неразложимый идемпотент полупростого артинова кольца A.

Задача 6.4. Известно, что многочлен $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ не имеет кратных корней. Покажите, что $\mathbb{Q}[t]/(f(t)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\oplus s} \oplus \mathbb{C}^{\oplus t}$ является полупростой алгеброй. Как понять, чему равны числа s и t, если вы знаете корни $f(t)$?

Задача 6.5. Разложите в прямую сумму полей:
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$; **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3})$; **(в)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$;
(г) $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^2}$; **(д)** $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^3}$.