

Семинар 12. Полупростые алгебры

Задача 12.1. Выясните, является ли кольцо полупростым и опишите неприводимые модули над ним, если оно полупростое

- (а) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + px + q)$ (в зависимости от p и q);
- (б) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (в зависимости от n);
- (в) $Mat_N(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$,
- (г) кольцо верхнетреугольных матриц над полем;
- (д) кольцо матриц над полем, коммутирующих с данной матрицей (в зависимости от ее фробениусовой формы).

Задача 12.2. Опишите неприводимые представления групп Q_8 и S_3 над полем \mathbb{k} и разложите групповые алгебры $\mathbb{k}Q_8$ и $\mathbb{k}S_3$ в прямую сумму простых.

- (а) $\mathbb{k} = \mathbb{C}$; (б) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$; (в)* $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

Задача 12.3. Докажите, что существует единственное тело (конечномерная алгебра с делением) над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} .

Задача 12.4. Пусть D – конечномерная алгебра с делением над полем \mathbb{k} характеристики 0. Покажите, что форма $\langle a, b \rangle := \text{Tr}(L_{ab})$ на \mathbb{k} -алгебре (а) D , (б) $Mat_n(D)$ невырождена. Как всегда, L_a – обозначает оператор умножения слева на a .

Задача 12.5. Алгеброй Клиффорда $Cl_{\mathbb{k}}(V, q)$, связанной с квадратичной формой $q()$ на векторном пространстве V поля (нулевой характеристики) \mathbb{k} называется факторалгебра свободной тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу порожденному соотношениями $v \otimes v - q(v)$.

(а) Покажите, что для $V = W \oplus W^*$ и формы $q((w, \psi)) := \psi(w)$ внешнее умножение на векторы из W и свертка тензоров с функционалами из W^* продолжаются до действия алгебры $Cl_{\mathbb{k}}(V, q)$ в пространстве кососимметричных тензоров $\Lambda(W)$.

(б) Докажите, что данное представление неприводимо и что $Cl_{\mathbb{C}}(V, q)$ изоморфна матричной алгебре от $\Lambda(W)$. В частности, вычислите $\dim_{\mathbb{C}}(Cl_{\mathbb{C}}(V, q))$.

(в)* Покажите, что если форма q – невырождена, то алгебра Клиффорда $Cl_{\mathbb{C}}(V, q)$ полупроста. Разберите отдельно случай четномерного и нечетномерного пространств V . Опишите изоморфизм с суммой матричных над \mathbb{C} , описав все неприводимые представления.

Указание: Если $\dim V = 2k + 1$, то неприводимых представлений у $Cl_{\mathbb{C}}(V, q)$ два. Что это за представления?