Обыкновенные дифференциальные уравнения 2020, листок 3 (23 сентября)

Задача 1. Для векторного поля $v(x) = kx$ на прямой вычислить $\varphi_N(t_0)$, построенное ломаными Эйлера, и доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(t_0) = e^{kt_0}x_0.$$

Задача 2. Для векторного поля на плоскости $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ и $x_0 = (a,0)$ вычислить $\varphi_N(t_0)$, построенное ломаными Эйлера, и найти предел $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(t_0)$.

Задача 3. Пусть z неподвижная точка сжатого отображения f с параметром λ и $\rho(x, f(x)) = d$. Докажите, что

$$\rho(x,z) \leq \frac{d}{1-\lambda}.$$

Задача 4. Касательная к графику $P(\varphi)$ в точке с абсциссой t параллельна $(v(\varphi(t),t),1)$ – докажите.

Задача 5. Докажите, что в конечномерном пространстве любые две нормы $||.||_1$ и $||.||_2$ эквивалентны, то есть существуют такие положительные чила C_1, C_2, что

$$C_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$$

при любом x.

Задача 6. Являются ли следующие отображения липшецевыми: 1) $y = \sqrt{x}$ (отображение $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ со стандартной метрикой в образе и прообразе $\rho(x,y) = |x-y|$); 2) $y = x^2$ (те же области определений и значений и метрика); 3) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ на плоскости и луче евклидовы метрики).

Задача 7. Докажите, что липшицевы отображения непрерывны. Верно ли, что непрерывное отображение компакта липшицево?