Обыкновенные дифференциальные уравнения 2020, листок 1 (9 сентября)

Задача 1. Доказать, что внутренности квадрата, круга и полукруга попарно диффеоморфны.

Задача 2. Являются ли следующие отображения диффеоморфизмами плоскости $\mathbb{R}^2$
а) $(x, y) \mapsto (2y, x + y^2)$; $(x, y) \mapsto (y + \varepsilon \sin(y), \cos(y) + x)$

Задача 3. Докажите (локальную) единственность решения для дифференциальных уравнений на прямой $\dot{x} = 0$, $\dot{x} = 1$ и $\dot{x} = kx$.

Задача 4. а) Запишите векторное поле $\frac{\partial}{\partial x}$ в полярных координатах. Запишите векторное поле $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ в декартовых координатах.

б) Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y + x^2, 2x)$. Докажите, что F – диффеоморфизм и найдите $F_* v$ для $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

Задача 5. Выпрямить векторное поле $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ на множестве $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$.

Задача 6. Пусть матрица $\varphi(t)$ гладко зависит от t, ортогональна при любом t и $\varphi(0) = E$. Докажите, что ее вектор скорости в нуле – кососимметрическая матрица.

Задача 7. Найдите $L_v f$ для $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, f – однородный многочлен степени k .

Задача 8. Найдите формулу для коммутатора векторных полей $\sum a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Задача 9. Проверьте тождество Якоби $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ для векторных полей x, y, z.

Задача 10. Существует ли в пространстве векторных полей на прямой трехмерное подпространство, замкнутое относительно коммутирования?