Алгебра 3, НМУ, Лекция 13 | 1.12.2020

В прошлый раз говорили про полупростоту.

Д-ли теорему плотности, т-му о двойном централизаторе и получили классификацию полупростых колец.

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(D_i), \quad M_{n_i}(D_i) = \underbrace{D_i \oplus \ldots \oplus D_i}_{n_i}, \text{ как левый } A\text{-мод.}$$

и $D_i$ – неприв. пр-ие.

---

Сегодня хотим примеры.

Пусть $\dim_{\Bbbk} A < \infty$

Опр. $\mathrm{rad}(A)$ – радикал $= \left\{ a \in A \mid \forall V \text{ – неприв. пр-ия } aV = 0 \right\}$

Предл. 1 $\mathrm{Rad}(A)$ – двустор. идеал.

Предл 2 Пусть $\dim_{\Bbbk} A < \infty$, тогда

(i) $I$ – нильпотентный, т.е. $\exists N : I^N = 0 \Rightarrow I \subset \mathrm{Rad}(A)$

(ii) $\mathrm{Rad}(A)$ – нильпотентный $\Rightarrow \mathrm{Rad}(A)$ – максимальный нилп. идеал.

Д-во (i) Если $V$ – неприв. $\Rightarrow IV \subset V$, однако
$I$ – нильп. идеал
$$0 = I^n V \subset \ldots \subset I^2 V \subset IV \subset V$$

Поэтому, если
$\exists V : IV \neq 0 \Rightarrow IV = V \Rightarrow \exists a \in I : aV = V$
$\Rightarrow a^n V = V \Rightarrow a^n \neq 0.$
противоречие.

(ii) Пусть $0 \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = A$ фильтрация регулярного пр-ия т.ч. $A_i / A_{i-1}$ — неприводимо.

Такая существует т.к. $\dim A < \infty$.

Если $\forall a \in \mathrm{Rad}(A)$ имеем $a \curvearrowright A_i / A_{i-1} = 0 \Leftrightarrow a A_i \subset A_{i-1}$

$$\Rightarrow \mathrm{Rad}(A)^{n+1} = 0.$$

<u>Теор.</u> $A / \mathrm{Rad}\, A$ — полупростая алг-ра.

<u>Д-во:</u> Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — список неприводимых пр-ий.

$\dim V_i < \infty$ т.к. $A v_i = V_i \Rightarrow A \supset I_i \twoheadrightarrow V_i$.

Если $V_1, \ldots, V_2$ — различные неприводимые,

Пусть $D_1 = \mathrm{End}_A V_1, \ \ldots, \ D_2 = \mathrm{End}_A V_2$.

это тела (кольца с делением)

и $A \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{D_1}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{D_n}(V_n) = \mathrm{End}_{D_1 \oplus \ldots \oplus D_n}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)$

(теор. плотности).

В частности # неприводимых $\leq \dim A < \infty$.

Имеем $A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_{D_1}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}_{D_2}(V_2)$

$\ker \varphi = \mathrm{Rad}(A)$ — то, что действует нулём во всех неприв. пр-иях.

$\square$

Эта общая теорема полезна, но вычислить радикал может быть не самой простой задачей.

Примеры. $\mathbb{F}$ – поле, ← одно пр-ие
$M_n(\mathbb{F})$
$M_n(D)$, как устроены тела.

Пример. $D(\alpha, \beta) := \mathbb{K}\{i, j \mid \begin{smallmatrix} i^2=\alpha \\ j^2=\beta \end{smallmatrix}, ij=-ji\}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$.

имеет базис $1, i, j, ij = k$

$\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{K}$
$\sqrt{\beta} \notin \mathbb{K}$

$q = a + bi + cj + dk$

$\overline{q} = a - bi - cj - dk$

$N(q) := q \cdot \overline{q} = a^2 - \alpha b^2 - \beta c^2 + \alpha\beta d^2 \in \mathbb{K}$.

Если $N(q) \neq 0 \Leftrightarrow q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N(q)}$.

---

$\boxed{\text{Критерий}}$ Форма следа на $A$ невырождена ($\dim_{\mathbb{K}} A < \infty$) $\Rightarrow$ $A$ – полупроста.

Д-во Д-м обратное утверждение.

Если $A$ – не полупроста $\Rightarrow \operatorname{Rad}(A) \neq 0$

$\Rightarrow \exists a \in \operatorname{Rad}(A)$ – это двусторонний идеал.

$\Rightarrow L_a$ – нильпотентный оператор. $\Rightarrow \operatorname{tr}(L_{ab}) = \langle a, b \rangle = 0$.

и $\forall b \in A$ $L_{ab}$ – нильп. оператор

$\Rightarrow$ форма следа вырождена.

**Предложение.** Если $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, то $A$-полупросто $\Leftrightarrow$ $\operatorname{tr}(\,,\,)$ - невырожд.

**Д-во.** $L \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ — нильпотентный $\Leftrightarrow$ $\operatorname{tr}(L) = \operatorname{tr}(L^2) = \ldots = 0$

Если $D$ - тело, то $\forall a \in D \ \exists a^{-1} \in D$
$\Rightarrow \langle a, a^{-1} \rangle = \operatorname{Tr}(1) = \dim D \neq 0.$

На $M_n(D)$ - невырождена, т.к. достаточно д-ть для матричных единиц. $\langle E_{ij}, E_{ji} \rangle \Leftrightarrow \operatorname{Tr}|_D$.

На $M_{n_1}(D) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(K)$ как на прямой сумме.

$\square$

---

Для $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 0$ это не верно, т.к. $\exists$ несепарабельные расширения.

$\mathbb{F}_p(t) / \mathbb{F}_p(t^p)$. - форма вырождена.

---

Поэтому для удобства работаем далее с телами $/\mathbb{K}$, при условии $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, хотя многие утверждения можно обобщить и на другие поля.

---

**Сл-ие** $A$ - полупроста $/_{\mathbb{K}}$ $\Rightarrow$ $\forall \ \mathbb{F}/_{\mathbb{K}}$ $\ \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} A$ - полупроста $/\mathbb{F}$
$\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$

**Д-во:** следует из невырожд. формы следа, которую достаточно д-ть в каком-то базисе.

Опр. Алгебра $D/\mathbb{K}$ называется центральной простой, если $D$ – простая, т.е. имеет единств. неприв. пр-ие, $\Leftrightarrow$ нет двусторонних идеалов.
и $Z(D)=\mathbb{K}$.

Предложение $D$ – ц. п. $/\mathbb{K}$ (с делением!) $\Rightarrow$ $\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} D$ – центральная простая $/\mathbb{F}$.

Д-во: Пусть $I \subset \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} D$ – двусторонний, ненулевой идеал.

тогда $\exists\, a^{\neq 0} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \otimes a_i \in I$, самая короткая лин. комбин.

$\{a_i\}$ – лин. нез $/\mathbb{K}$, иначе можно было бы уменьшить
$\{\lambda_i\}$ – лин. нез $/\mathbb{K}$ число слагаемых.

Домножим на $a^{-1}$ $\rightsquigarrow$

$$a = (\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \quad )$$

$a_2 \notin \mathbb{K} = Z(D)$

$$\Rightarrow \exists c: \; c a_2 c^{-1} \neq a_2$$

и можно уменьшить кол-во слагаемых:

$$a - cac^{-1} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (a_i - c a_i c^{-1}) \in I.$$

$$\Rightarrow s=1 \Rightarrow I \ni 1. \Rightarrow I = \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} D.$$

$\square$.

Сл-ие $\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} D \cong \mathrm{Mat}_m(\tilde{D})$, и

$\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_n(D) \simeq \mathrm{Mat}_{nm}(\tilde{D})$.

центр. простые алгебры переходят в центр. простые при расш. скаляров.

**Опр.** Группа Брауэра поля $\mathbb{K}$

— {мн-во центр. простых алгебр} / $D \sim M_n(D)$

Морита эквив.

Почему группа: $D_1 \otimes_{\mathbb{K}} D_2$ — тоже центр. простая алгебра.

Д-м для char $\mathbb{K}=0$ $D_1 \otimes_{\mathbb{K}} D_2$ — полупроста из-за формы следа.

$$Z(A \otimes_{\mathbb{K}} B) = Z(A) \otimes Z(B) = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}.$$

$$D \otimes_{\mathbb{K}} D^{op} \simeq M_n(\mathbb{K}) \quad n = \dim D.$$

---

$$Br(\mathbb{F}/\mathbb{K}) := \ker\left(Br(\mathbb{K}) \longrightarrow Br(\mathbb{F})\right).$$

---

Если $D$ — ц.п.а / $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, то $D = \mathbb{K}$.

т.к. иначе $\forall \alpha \in D$ $\mathbb{K}(\alpha) \subset D$ а это только $\mathbb{K}$.

$\uparrow$ расширение поля $\mathbb{K}$.

---

**Предлож.** $\exists\ \mathbb{F}/\mathbb{K}$ — конечное, т.ч. $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} D \simeq M_n(\mathbb{F})$.

$\Rightarrow \dim D = n^2$. (n — называется степенью алг-ры D).

**Д-во:** $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} D \simeq M_n(\overline{\mathbb{K}})$ рассмотрим какой-то и-зм.

и возьмём в качестве $\mathbb{F} = \mathbb{K}(E_{ij}, \cancel{x_i})$

матричн. единицы для образа базисных эл-ов у D.

Пример $\mathbb{K}(\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta}) \otimes_{\mathbb{K}} D(\alpha,\beta)$ — расщепляется.

Т-ма Всякое максимальное подполе $\mathbb{F}$ в у.н.а. с делением $D$ имеет степень $n$. $\boxed{\dim_{\mathbb{K}} D = n^2, \quad [\mathbb{F}:\mathbb{K}] = n}$

Д-во: Пусть $A \subset D$.

тогда $Z_D(A) = \{x \in D \mid xa = ax\}$ — подпр-во, заданное линейными ур-ями

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} Z_{D\otimes\mathbb{F}}(A) = \dim_{\mathbb{K}} Z_D(A)$.

$\Rightarrow$ Если $A$ — максим. коммут. подалгебра в $D$, то $\mathbb{F}\otimes A$ — остаётся таковой.

Но в алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$ — максимальная коммут. подалгебра — это только диагональные в каком-то базисе.

$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}} = \underbrace{\overline{\mathbb{K}} \oplus \ldots \oplus \overline{\mathbb{K}}}_{\dim \mathbb{F}}$ Если кол-во слагаемых

$\mathbb{F}\otimes\overline{\mathbb{K}} \simeq \langle e_1, \ldots, e_s \rangle \quad e_i^2 = e_i, \; e_i e_j = 0 \; i \neq j$.

Если $s < n$, то можно добрать ещё эл-ов.

---

Теор. (Фробениуса) $Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

Конечномерные тела $/\mathbb{R}$ = $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Д-во: $\dim D = n^2$, $n = [\mathbb{F}:\mathbb{R}]$, конечных расширений может быть 2, $n=1$, $n=2$.

Если $n = 1$, то $D = \mathbb{R}$

$n = 2$, то $\dim D = 4$.

$\varphi: D(\mathbb{C}) \simeq Mat_2(\mathbb{C})$ $\quad (X, Y) = tr(XY)$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ 1 & \longrightarrow & Id \end{array}$$

$= D_0 = (1)^{\perp} = \{X \in Mat_2(\mathbb{C}),\ trX = 0\}$.

$\underset{X}{\Psi}$ тогда $(x, x) =$

$X^2 - trX \cdot X + \det X \cdot Id = 0 \iff X^2 = \lambda \cdot Id$.

Более того $\lambda \leq 0$ т.к. иначе $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x]/_{x^2 - \lambda}$ - не поле.

$\Rightarrow$ скалярное произв-ие на $D_0$ - отрицательно определено.

Можно подобрать $i, j \in D_0$ лин. нез.

т.ч. $i^2 = j^2 = -1$

$\Rightarrow (i+j)^2 = (i+j, i+j) = -2 \Rightarrow ij + ji = 0$.

и имеем $\mathbb{H} \to D$. $\blacksquare$

<u>Сл-ие</u>: $\mathbb{R}G \simeq \oplus M_{n_i}(\mathbb{R}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{H}) \oplus M_{n_i}(\mathbb{C})$.