НМУ | Алгебра-2

Семестр делится на 2 большие темы:
коммутативная и некоммутативная алгебра.
(Кольца, идеалы, расширения полей) (продолжение теории представлений)

Начинаем с простой, но очень важной темы:

Нётеровы кольца и модули

Напоминание

Коммутативное кольцо: R — две операции: сложение $+: R\times R \to R$ и умножение $*$

$(R,+)$ — абелева группа
$(R\setminus 0, *)$ — ассоциативный моноид. + дистрибутивность, существование 1

Идеал $I \subset R$ — подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения на эл-ты кольца.

Если $\varphi: R \to S$ — гомоморфизм колец, то $\ker\varphi$ — идеал.

и $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.

Обозначение: $(a_1,\dots,a_n)$ — идеал, порождённый эл-ами $a_1,\dots,a_n$ (всевозможные линейные комбинации)

Определение (теор) Кольцо R называется нётеровым, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) любой идеал конечно порождён

(ii) любая возрастающая цепочка идеалов обрывается:
$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_n \subset \dots \Rightarrow \exists N: \forall n > N \quad \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_N$.

(iii) любое непустое мн-во идеалов имеет максимальный эл-нт.

(Условие (iii) отличается от (ii) при помощи аксиомы выбора)
можно к нему не прибегать, если вы хотите воздержаться от данных приложений)

Д-во: (i) ⇒ (ii) Рассмотрим идеал $\mathfrak{a} := \bigcup_n \mathfrak{a}_n$, он конечно порождён

⇒ у него есть порождающие $x_1, \dots, x_N \subset \mathfrak{a}_N$ ⇒ $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_N$ $\forall n > N$.

(ii) ⇒ (iii) „Это приложение аксиомы Выбора"

Если максимального эл-та нет, то есть строго возрастающая цепочка

(iii) ⇒ (i) Рассмотрим множество всех к.п. идеалов $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

оно имеет максимальный элемент C, если $\mathfrak{a} \setminus C \ni x$, то (C, x) конечно порождён

и $C \subsetneq (C, x) \subset \mathfrak{a}$ ⇒ C не максимальный.

$\square$

Пример. 1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[x]$ и любое КГИ нётерово.

2) Если R - нётерово ⇒ $R/_{\mathfrak{a}}$ - нётерово.

3) $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ не нётерово, т.к. $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \dots$

4) Подкольцо нётерова кольца может быть не нётеровым

$1 \oplus (x) \subset \mathbb{K}[x, y]$ ← про это докажем чуть позже.

Есть цепочка идеалов: $(x) \subset (x, xy) \subset (x, xy, xy^2) \subset \dots (x, xy, \dots, xy^n)$

(Теор Гильберта о базисе)

Теор. Если R - нётерово ⇒ $R[x]$ - нётерово.

Сл-ие к.п. алгебра над полем нётерова. ($\mathbb{K}[x_1, \dots x_n]/_{\mathfrak{a}}$ - нётерова)

Д-во: Пусть $\mathfrak{a} \subset R[x]$

построим $\mathfrak{a}(0) \subset \mathfrak{a}(1) \subset \dots \subset \mathfrak{a}(n) \subset \dots \subset R$

идеалы старших членов, т.е. $\mathfrak{a}(n) := \{ a \in R \mid \exists\, b(x) \in \mathfrak{a},\ \text{т.ч. } b(x) = ax^n + \text{lower terms} \}$

имеем $\mathfrak{a}(n) \subset \mathfrak{a}(n+1)$, т.к.

$$\begin{matrix} \overset{\psi}{ax^n + \dots} & & ax^{n+1} + \dots \\ \overset{\shortparallel}{b(x)} & \longmapsto & \overset{\shortparallel}{x \cdot b(x)} \end{matrix}$$

Тогда эта цепочка обрывается: $\mathfrak{a}(d) = \mathfrak{a}(d+1) = \dots$

Выпишем образующие идеалов $\underset{(c_{01}, \dots c_{0 d_0})}{\mathfrak{a}(0)}, \dots, \underset{(c_{d_1}, c_{d_2}, \dots)}{\mathfrak{a}(d)}$ их конечное число

и выпишем их прообразы в $\mathfrak{a}$.

Утв-се, что эти прообразы порождают $\mathfrak{a}$.

Действительно, имеем $f \in \mathfrak{a}$, $\deg f > d$

⇒ $f = a \cdot x^n + \dots = x^{n-d} \cdot g + \text{lower terms}$,

Если $\deg f \leq d$, то можно понизить степень другими эл-ами.

Историческая справка: нётерово идёт от Эмми Нётер (1882 – 1935) (выдающаяся женщина математик, которой пришлось длительное время работать бесплатно, читать лекции за Гильбертом)

Пример приложения теории нётеровых колец в теории инвариантов:

Теор. Гильберта об инвариантах: Пусть G – конечная группа, V – её конечномерное представление комплексное представление

Тогда алгебра инвариантов $\mathbb{C}[V]^G$ – конечно порождена.
(G – инвариантных ф-ий на V^*).

Д-во: $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty \Rightarrow \mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ – нётерова.

Рассмотрим идеал I, порождённый $\mathbb{C}[V]^G_+$ – однородные G-инв.-ые ф-ии $\deg > 0$.

Он порождается эл-ами $a_1, \dots, a_n$ (эти элементы можно считать однородными).

Докажем, что эти эл-ты порождают $\mathbb{C}[V]^G$, как алгебру.

Для этого рассмотрим вспомогательный оператор усреднения

$$\rho: \mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[V]^G. \qquad f \longmapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \cdot f$$

Это не гомоморфизм колец, но г-зм $\mathbb{C}[V]^G$-модулей.

Имеем:
- $\rho(1) = 1$
- $\rho(ab) = a\rho(b) \quad \forall a \in \mathbb{C}[V]^G$, ρ – сохраняет степень.
- $\rho(a+b) = \rho(a) + \rho(b)$.

Тогда $\forall f \in \mathbb{C}[V]^G \subset I$ найдутся $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{C}[V]$ т.ч. $f = a_1 b_1 + \dots + a_r b_r$
$\deg f = d$. $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}[V]^G$

все элементы можно считать однородными, т.к. можно рассмотреть однородную компоненту.

$\Rightarrow f = \rho(f) = \rho(\sum a_i b_i) = \sum_i a_i \rho(b_i) \Rightarrow$ по индукции они выражаются через a_i.
$\deg \rho(b_i) < \deg f$

$\square$.

<u>Пример.</u> $\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/2}$ $\qquad \sigma : x \to -x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma : y \to -y$

$$\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2] = \mathbb{C}[a,b,c]/_{ac-b^2}.$$

Понятие нётерова модуля у нас с вами было, но можно повторить дословно имеющееся опр-ие:

<u>Опр.</u> Модуль M над R является нётеровым, если выполнено одно из равносильных условий:

(i) любой подмодуль кон. порождён

(ii) любая возрастающая цепочка подмодулей обрывается

(iii) любое непустое мн-во подмодулей имеет максимальный эл-нт.

<u>Теор.</u> $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$

M_1, M_3 – нётеровы $\iff$ M_2 – нётеров.

<u>Д-во:</u> в одну сторону просто ($\Leftarrow$), в другую надо рассматривать порождающие.

<u>Теор.</u> Конечно-порождённый модуль над нётеровым кольцом нётеров.

<u>Д-во</u> индукция по кол-ву порождающих.

Если M - порождается 1 элементом, то $M \simeq R/\mathfrak{a} \Rightarrow M$-нётеров.

Если M порождается n элементами, то

$$0 \to \underset{(a_1,\dots,a_{n-1})}{N} \to \underset{(a_1,\dots,a_n)}{M} \to \underset{a_n}{M/N} \to 0.$$