6. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА.

Основные задачи

Задача 1. Пусть $T_1, \ldots, T_m$ — параллельные отрезки на плоскости, $m \geq 3$. Известно, что для любых трех отрезков существует пересекающая их прямая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.

Задача 2. а) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество (не обязательно выпуклое!). Известно, что любые $n+1$ точек $a_1, \ldots, a_{n+1} \in X$ лежат в шаре радиуса 1 (с границей). Докажите, что все X лежит в шаре радиуса 1. б) На плоскости имеется конечное множество точек, попарные расстояния между которыми не превышают 1. Докажите, что все точки содержатся внутри круга радиуса $1/\sqrt{3}$.

Задача 3. а) Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $X \subset V$ — выпуклое множество. Докажите, что множество $X^* \subset V^*$ линейных функционалов $\ell : V \to \mathbb{R}$ таких, что $\ell(v) \leq 1$ для всех $v \in X$, является выпуклым. б) Как связаны множества X^* и Y^*, если выпуклое множество Y — образ выпуклого множества X при линейном преобразовании $A : V \to V$? в) Пусть V конечномерно, а $X \subset V$ выпукло. Как связаны множества X и $X^{**} \subset V^{**} = V$?

Задача 4. Опишите X^*, если X это а) точка $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, б) полуплоскость (на плоскости); придумайте также многомерное обобщение этой задачи, в) n-мерный куб $K_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| \leq 1 \forall i = 1, \ldots, n\}$, г) n-мерный шар $B_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, д) внутренность параболы, т.е. множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$, и внутренность гиперболы, т.е. множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^2 + 1\}$?

Выпуклое подмножество $F \subset X$ выпуклого множества X называется гранью, если для всякой точки $b \in F$ из того, что $b = ta_1 + (1-t)a_2$, $0 \leq t \leq 1$ и $a_1, a_2 \in X$ следует, что $a_1, a_2 \in F$. Грань, состоящая из одной точки, называется крайней точкой или вершиной; грань-отрезок называется ребром.

Задача 5. Докажите, что если точка b принадлежит грани F выпуклого множества X и является выпуклой комбинацией некоторых точек $a_1, \ldots, a_k \in X$ с ненулевыми коэффициентами, то обязательно $a_1, \ldots, a_k \in F$. (В частности, вершина не может являться нетривиальной выпуклой комбинацией точек множества.)

Задача 6. а) Пусть $X \subset V$ — выпуклое множество, $\ell : V \to \mathbb{R}$ — линейная функция, а $F \subset X$ — множество точек, в которых функция ℓ достигает своего наибольшего значения на X. Докажите, что F является гранью в X. б) Опишите все грани n-мерного шара (с границей).

Выпуклая оболочка конечного множества точек в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым многогранником.

Задача 7. а) Докажите, что если в выпуклом многограннике (многоугольнике) $X \subset \mathbb{R}^2$ любые две вершины соединены ребром (стороной), то это треугольник. б) Аналогичный вопрос про $\mathbb{R}^3$: если в трехмерном многограннике любые две вершины соединены ребром, то это тетраэдр.

Указание. Аналогичное утверждение в размерностях 4 и выше неверно.

Задача 8. Множество $X \subset \mathbb{R}^4$ задано системой уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} -1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть $f_1 = (1, 1, -1, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, -1, 1)$. а) Докажите, что $M = \{y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 \mid |y_1 \pm y_2 \pm y_3| \leq 1\}$ (всего 4 условия с модулем). б) Опишите вершины, ребра и двумерные грани множества M. в) Докажите, что M — выпуклый многогранник.

Задача 9. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ — целые числа. Многогранник Гельфанда–Цейтлина $C_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ это множество $\{(x_{11}, x_{12}, x_{21}) \mid \lambda_1 \leq x_{11} \leq \lambda_2 \leq x_{12} \leq \lambda_3, x_{11} \leq x_{21} \leq x_{12}\}$. Найдите вершины, ребра и грани многогранника а) для $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$; б) для произвольных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$.

Дополнительные задачи

Для решения этих задач нужны (по крайней мере, полезны) некоторые сведения из анализа: что такое точная верхняя (и нижняя) грань подмножества $X \subset \mathbb{R}$, что такое замкнутое (и открытое) подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$. Желательно также знать, что такое компакт (хотя бы $K \subset \mathbb{R}^n$).

Задача 10. Докажите, что всякое непустое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}$ есть отрезок, интервал, полуинтервал, луч (с началом или без) или вся прямая.

Задача 11. а) Приведите контрпример к теореме Хелли в случае, когда набор выпуклых множеств $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ бесконечен. б) Докажите теорему Хелли для бесконечного набора выпуклых компактных подмножеств $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 12. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, и $y \notin X$. а) Докажите, что существует линейная функция ℓ и число $b \in \mathbb{R}$ такое, что $\ell(y) \leq b$ и $\ell(x) \geq b$ для всякого $x \in X$. б*) Докажите, что если X замкнуто, то можно добиться неравенств $(a, y) \leq b$ и $(a, x) > b$ для всякого $x \in X$.

Задача 13. а) Докажите, что выпуклая оболочка компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. б) Приведите пример замкнутого множества $Y \subset \mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка которого не замкнута. в) Верно ли, что замыкание выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ выпукло?