Доп.главы топологии. Листок 4 (к лекциям 7-9).

Крайний срок 30 ноября. Загружать решения можно сюда

Задача 1. Облако точек $\mathcal{X}$ представляет собой базисные векторы

$$(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$$

Опишите устойчивые гомологии фильтрации Чеха для этого облака точек.

Задача 2. С помощью матричного алгоритма вычислите диаграмму устойчивости для следующей фильтрации. В момент времени 0 родились 3 вершины $\{1\},\{2\},\{3\}$. В момент времени 4 родились ребра $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ и вершина $\{4\}$. В момент времени 5 родились ребра $\{1,4\}$, $\{3,4\}$. В момент времени 7 родилось ребро $\{1,3\}$. В момент времени 10 родилось ребро $\{2,4\}$. В момент времени 16 родились треугольники $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$. В момент времени 20 родился треугольник $\{2,3,4\}$. В момент времени 23 родился тетраэдр $\{1,2,3,4\}$.

Задача 3. Пусть K_t — динамический симплициальный комплекс на 4 вершинах, заданный при помощи указания интервалов жизни для каждого симплекса (левый конец — время рождения симплекса, правый — время смерти):

{1}	{2}	{3}	{4}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,4}	{3,4}	{1,3,4}
[0,7]	[0,7]	[0,7]	[0,7]	[1,6]	[1,4]	[1,5]	[1,5]	[2,6]	[3,4]

Опишите (рукомахательно-умозрительно) все зигзаг устойчивые гомологии и их интервалы жизни.

Задача 4. Докажите, что любое конечномерное представление колчана $\bullet\to\bullet$ разлагается в сумму неразложимых представлений вида $\mathbb{k}\to 0$, $0\to\mathbb{k}$, $\mathbb{k}\xrightarrow{\cong}\mathbb{k}$ (для любого поля $\mathbb{k}$).

Задача 5. Сколько существует неизоморфных представлений колчана A_n (т.е. $\bullet\to\bullet\to\cdots\to\bullet$), у которых в каждой вершине стоит одномерное пространство?

Задача 6. Постройте бесконечное число попарно неизоморфных неразложимых коммутативных представлений колчана $A_3\times A_3$ над полем $\mathbb{R}$.

Комментарий по пройденному. Эти 3 лекции были про топологический анализ данных (TDA) и устойчивые гомологии. Источников по этой теме вагон (см., например, книги [**10, 6, 12, 13**]). Чтобы не нужно было все это читать, для своих студентов на ФКН я написал методичку [**1**]. Она покрывает почти все, что было на лекциях по этой теме. **Лекция 7.** Были сказаны общие слова про TDA и устойчивые гомологии, теорема о классификации модулей устойчивости. Вроде бы первенство в изобретении устойчивых гомологий делят Карлсон–Зомородиан и Эдельсбруннер. Но идея о выделении спаренных симплексов тянется к работе Баранникова [**2**] по теории Морса. **Лекция 8.** Разбирали алгоритм построения диаграммы устойчивости подробной фильтрации с помощью метода Гаусса. Это следовало работе [**7**]. Немного поговорили про зигзаг-устойчивость, см. [**4, 5**]. См. также пакет [**11**], которым можно вычислять разложение зигзаг устойчивого модуля гомологий в сумму интервальных. **Лекция 9.**

Говорили про представления колчанов. Связь этой темы с TDA раскрыта в книге [**12**]. Более математичную теорию представлений колчанов советую изучать по заметкам Бриона [**3**]. Теорему Крулля–Шмидта можно загуглить или посмотреть в [**9**]. Результат про конечность коммутативных представлений лесенок см. в [**8**] и ссылки в ней.

Список литературы

[1] А. Айзенберг. Методичка по гомологиям. link.

[2] S. Barannikov, *Framed Morse complex and its invariants*, Advances in Soviet Mathematics. Vol.21 (1994), pp. 93–115.

[3] M. Brion, *Representations of quivers*, link.

[4] Gunnar Carlsson, Vin de Silva, *Zigzag persistence*, arXiv:0812.0197.

[5] G. Carlsson, V. de Silva, D. Morozov, *Zigzag Persistent Homology and Real-valued Functions*, Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry, p. 247-256, 2009.

[6] H. Edelsbrunner, J. L. Harer. Computational Topology: An Introduction. 2010.

[7] H. Edelsbrunner, J. Harer, *Persistent homology — a survey*, in Contemporary Mathematics, Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later, 2008.

[8] E. G. Escolar, Y. Hiraoka, *Persistence Modules on Commutative Ladders of Finite Type*, arXiv:1404.7588.

[9] A. Facchini, *The Krull–Schmidt Theorem*, in Handbook of Algebra Vol.3, 2003.

[10] R. Ghrist. Elementary applied topology. link.

[11] D. Morozov, Dionysus2 library https://mrzv.org/software/dionysus2/

[12] S. Oudot. Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis. 2015.

[13] A. Zomorodian. Topology for Computing (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Series Number 16). 2005