Доп.главы топологии. Листок 2 (к лекциям 3,4).

Крайний срок 6 ноября. Загружать решения можно сюда

Задача 1. Доказать универсальное категорное свойство конструкции colim (то есть доказать, что colim, каким он был построен на лекции — это прямой предел в категории топологических пространств).

Задача 2. Доказать свойство гомотопической инвариантности гомотопического копредела.

Задача 3. Докажите, что $m \geqslant n$ аффинных гиперплоскостей в общем положении разрезают $\mathbb{R}^n$ на

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{n}$$

частей (не используя формулу Горески–Макферсона).

Задача 4. Придумайте и докажите аналог формулы Горески–Макферсона для конфигурации круглых подсфер в круглой сфере $S^n = \{\sum_0^n x_i^2 = 1\}$. Круглой подсферой называется пересечение S^n с аффинным подпространством в $\mathbb{R}^{n+1}$, при условии, что это пересечение не пусто и не одноточечно.

Задача 5. Докажите, что r-мерный остов CW-разбиения сферы S^k гомотопически эквивалентен букету r-мерных сфер.

Задача 6. Пусть $\mathcal{P}$ — чум пересечений конфигурации векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$. В этом чуме есть наименьший элемент $\hat{0}$ (пересечение всех пространств конфигурации — это может быть $\{0\}$, а может быть и пространство бóльшей размерности). Докажите, что геометрическая реализация $|\mathcal{P}\backslash\{\hat{0}\}|$ гомотопически эквивалентна букету сфер одинаковой размерности.

Задача 7. Докажите следующую *чумовую теорему о слоях* Бьорнера–Велкера–Вакс. Пусть $f\colon S \to T$ морфизм чумов, такой что для любого $t \in T$ слой $|f^{-1}(T_{\leqslant t})|$ является $\dim f^{-1}(T_{<t})$-связным пространством. Пусть, кроме того, $|T|$ связно. Тогда имеет место гомотопическая эквивалентность

$$|S| \simeq |T| \vee \bigvee_{t \in T} |f^{-1}(T_{\leqslant t})| * |T_{>t}|.$$

Указание: рассмотрите диаграмму $\mathcal{D}\colon \operatorname{cat}(T) \to \mathrm{Top}$, $\mathcal{D}(t) = |f^{-1}(T_{\leqslant t})|$, и поиграйтесь с (гомотопическими) копределами.

Комментарий по пройденному. **Лекция 3.** Про общие конструкции пределов диаграмм в категориях — см. нетленную классику [**4**]. Про гомотопические копределы и их базовые свойства можно найти в Хатчере [**3**, Ch.4, App.G]. Свойства гомотопических копределов из лекции можно найти в [**5**], там много ссылок на более абстрактные статьи по этой теме. **Лекция 4.** В той же статье [**5**] можно найти доказательство гомотопической версии формулы Горески–Макферсона с помощью копределов. Про двойственность Александера — см. Хатчера [**3**, Ch.3,§3]. Чумовая теорема о слоях —

см. [**2**]. *И минутка мотивации.* Если вы хотите доказать неравенство классов сложности P и NP, то вам потребуется версия формулы Горески–Макферсона для этальных когомологий. По крайней мере, так считал Бьорнер [**1**].

Список литературы

[1] A. Björner, *Topological combinatorics*, lecture https://people.kth.se/ bjorner/files/MacPh60.pdf

[2] A. Björner, M. L. Wachs, V. Welker, *Poset fiber theorems*, Trans. Amer. Math. Soc. 357:5 (2005), 1877–1899.

[3] А. Хатчер, Алгебраическая топология, 2011.

[4] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.

[5] V. Welker, G. M. Ziegler, R. T. Živaljević, *Homotopy colimits — comparison lemmas for combinatorial applications*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 999:509 (1999), 117–149.