Листок 3.

Задача 1. Пусть последовательность неотрицательных чисел a_n такова, что

$$a_{n+m} \le a_n + a_m.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n$.

Задача 2. Пусть $a_n \ge 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a.$$

Задача 3.(Теорема Штольца) Пусть y_n – строго возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = A$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$.

С помощью теоремы Штольца найдите асимптотику последовательности $x_n = \sum_{k=1}^n k^m$ и найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Задача 4. Докажите, что

(a) y_n не убывает, а z_n не возрастает; (b) $z_n - y_n \le 1/n$;

(c) существует число $C > 0$ такое, что $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(d) докажите (действуя по аналогии с пунктами (a)–(c)), что найдется число C такое, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n+1} + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Задача 5. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

Задача 6.

(a) Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Этот предел обозначается через e.

(b) Докажите, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Выведите из этого иррациональность числа e.

Задача 7. Пусть $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$(a) \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \ (b) \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{1/k}} = 0, \ (c) \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \ (d) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Задача 8. Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность x_n такая, что

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big), \quad x_1 > 0,$$

сходится к $\sqrt{a}$. Оцените скорость сходимости.

Задача 9. Выведите из критерия Коши принцип вложенных отрезков. Приведите пример упорядоченного поля, на котором выполняется критерий Коши, но не выполняется аксиома полноты.

Задача 10. Найдите все подмножества числовой прямой, которые могут являться множествами частичных пределов такой последовательности a_n, что $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Задача 11. Выясните сходятся ли следующие последовательности: $a_n = \sin n$, $a_n = \sin n^2$, $a_n = \sin 2^n$.

Задача 12. Докажите, что для всякой последовательности a_n с положительными членами верна оценка

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Big(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n}\Big)^n \ge e.$$