НМУ, I курс, 09.09.2019

Листок 1.

Задача 1. На сколько частей делят поверхность сферы n плоскостей, которые проходят через центр этой сферы и никакие три из которых не проходят через одну прямую?

Задача 2. Задана бесконечная последовательность функций $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, определенных на числовой прямой. Докажите, что существует конечный набор функций $f_1, \ldots f_N$, композициями которых можно записать любую из функций g_k.

Задача 3. Пусть E – счетное множество точек на плоскости. Всегда ли множество E можно повернуть на некоторый угол вокруг начала координат так, что новое множество не будет пересекаться с E?

Задача 4. Докажите, что у функции на числовой прямой множество точек строгого локального минимума не более чем счетно.

Задача 5.

(a) Существует ли строго возрастающая биекция множества целых чисел $\mathbb{Z}$ на множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$?

(b)* Докажите, что существует возрастающая биекция множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на множество чисел вида $m/2^n$, где m, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Докажите, что

(a) существует биекция $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x, y) = h(\varphi(x) + \psi(y))$;

(b)* существует биекция $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Задача 7. Существует ли линейно упорядоченный по включению континуальный набор подмножеств множества натуральных чисел?

Задача 8. Укажите линейный порядок на множестве векторов плоскости, согласованный с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр.

Задача 9. Пусть $(X, \leq)$ – частично упорядоченное множество и два его элемента x, y не сравнимы. Введем новое отношение порядка $\leq^1$ следующим образом: $a \leq^1 b$, если $a \leq b$ или, в противном случае, $a \leq x$ и $y \leq b$. Докажите, что $\leq^1$ является отношением частичного порядка, которое продолжает отношение порядка $\leq$, причем элементы x и y теперь сравнимы.

Задача 10. Докажите, что всякий частичный порядок можно продолжить до линейного.

Задача 11. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из пяти элементов?

Если на множестве A задано отношение эквивалентности $\sim$, то подмножества вида $\{b\colon b \sim a\}$ называются *классами эквивалентности*, а множество, состоящее из всех таких классов, называется фактор множеством $A/\sim$.

Задача 12. В следующих примерах опишите фактор множество $A/\sim$ и дайте его геометрическую интерпретацию:

(a) $A = \mathbb{Q}$ и $a \sim b$ тогда и только тогда, когда найдется $c \neq 0$ такое, что $a = bc$;

(b) $A = \{-1, 1\} \times [0, 1]$, и $(x, t) \sim (y, s)$ тогда и только тогда, когда $t = s = 1$ или $t = s = 0$ или $x = y, t = s$.

(c) $A = \{-1, 1\} \times [0, 1] \times \{-1, 1\}$, и $(x, t, z) \sim (y, s, v)$ тогда и только тогда, когда $t = s = 1, z = v$ или $t = s = 0, x = y$ или $x = y, t = s, z = v$;

(d) $A = [0, 1] \times [0, 1]$ и $(x, t) \sim (y, s)$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и $t, s \in \{0, 1\}$ или $x, y \in \{0, 1\}$ и $t = s$;

(e) $A = [0, 1] \times [0, 1]$ и $(x, t) \sim (y, s)$ тогда и только тогда, когда $x = 1 - y$ и $t = 0, s = 1$ или $x = y, t = s$.