Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2019

10

10.1. Установите в категории конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$ изоморфизм $(V \pitchfork W)^* \equiv (W \pitchfork V)$, основанный на спаривании

$$(V \pitchfork W) \times (W \pitchfork V) \longrightarrow \Bbbk : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A \circ B) = \mathrm{tr}(B \circ A).$$

Распространяется ли такой изоморфизм на категории модулей конечного ранга над кольцами?

10.2. Постройте некоммутативную группу порядка 21. Изучите классы её сопряжённых элементов и постройте таблицу характеров.

10.3. Пусть G – конечная группа, $\rho : G \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ – её неприводимое n-мерное представление, а $C \triangleleft G$ – её центр. Докажите неравенство $n \leq \sqrt{\frac{\#G}{\#C}}$.

10.4. Постройте изоморфизм $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathsf{S}_5$, рассмотрев действие группы $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на множестве инволюций проективной прямой $\mathbf{P}_1(\mathbb{F}_5)$, не имеющих неподвижных точек. С помощью этого изоморфизма постройте неприводимое представление группы S_5 в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbf{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой. Какие значения принимает характер этого представления?

10.5. Пусть G – конечная группа, а $\rho : G \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ – её <u>инъективное</u> представление размерности $\dim V \geq 2$. Докажите, что характер χ_ρ принимает значение $\dim V$ ровно на одном классе сопряжённости.

10.6. Пусть характер некоторого неприводимого комплексного представления конечной группы G в пространстве V принимает ненулевое значение на классе сопряжённости $K \subset G$, причём порядок $\#K$ и размерность $\dim V$ взаимно просты. Докажите, что все элементы из класса K действуют на V скалярными преобразованиями.

10.7. Обозначим $\mathsf{Aff}_1(\mathbb{F}_p)$ группу обратимых аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ прямой над конечным полем $\mathbb{F}_p := \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

(а) Установите изоморфизм $\mathsf{Aff}_1(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$.

(б) Постройте неприводимое представление группы $\mathsf{Aff}_1(\mathbb{F}_p)$ в пространстве (теоретико-множественных!) функций $\mathbb{F}_p \dashrightarrow \mathbb{C}$ с нулевой суммой.

(в) Докажите, что все остальные неприводимые представления группы $\mathsf{Aff}_1(\mathbb{F}_p)$ одномерны.

14 ноября, *Г.Б. Шабат*