

4

4.1. Пусть $R \in \mathcal{RING}$ и $A \in R\text{-MOD}$. Рассмотрите *степенной функтор*

$$\text{pow}_A : R\text{-MOD} \longrightarrow R\text{-MOD} : X \mapsto X^A.$$

и проверьте его аддитивность. Точен ли он слева? Точен ли справа?

4.2. Пусть $R \in \mathcal{RING}$ и $A \in R\text{-MOD}$. Рассмотрите *показательный кофунктор*

$$\text{exp}_A : R\text{-MOD} \longrightarrow R\text{-MOD} : X \mapsto A^X.$$

и проверьте его аддитивность. Точен ли он слева? Точен ли справа?

4.3. Пусть $G \in \mathcal{GRP}$. Рассмотрите *функтор инвариантов*

$$\text{invar}_G : G\text{-MOD} \longrightarrow \text{RAB} : M \mapsto \{m \in M \mid G \cdot m = \{m\}\}.$$

Точен ли он слева? Точен ли справа?

4.4. (Левозэкспоненциальный формализм). Для объекта $M \in G\text{-MOD}$ и элементов $g \in G, m \in M$ введём переобозначение $g \cdot m =: {}^g m$. Проверьте тождества ${}^{g_1}({}^{g_2} m) \equiv {}^{g_1 g_2} m$ и ${}^g(m_1 + m_2) \equiv {}^g m_1 + {}^g m_2$.

4.5. (Продолжение задачи 4.3). Для $M \in G\text{-MOD}$ введём переобозначение:

$$\text{invar}_G(M) =: \text{H}^0(G, M).$$

Определим также для $M \in G\text{-MOD}$ в абелевой группе $M^{\text{forget}_{\text{SET}}^{\mathcal{GRP}}(G)}$ (то есть в группе M -значных функций на G , не связанных никакими алгебраическими соотношениями) две подгруппы:

$$\text{B}^1(G, M) := \{g \mapsto {}^g m - m \mid m \in M\}$$

и

$$\text{Z}^1(G, M) := \{c : G \dashrightarrow M \mid \forall g_1, g_2 \in G; c(g_1 g_2) = c(g_1) + {}^{g_1} c(g_2)\}.$$

Убедитесь, что $\text{B}^1(G, M) \subseteq \text{Z}^1(G, M)$. Это позволит определить

$$\text{H}^1(G, M) := \frac{\text{Z}^1(G, M)}{\text{B}^1(G, M)}.$$

Проверьте, что любая точная последовательность G -модулей

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

определяет точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{H}^0(G, M') \rightarrow \text{H}^0(G, M) \rightarrow \text{H}^0(G, M'') \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} \text{H}^1(G, M') \rightarrow \text{H}^1(G, M) \rightarrow \text{H}^1(G, M''), \end{aligned}$$

в которой сравнительно очевидны все морфизмы, кроме

$$\delta : \text{H}^0(G, M'') \rightarrow \text{H}^1(G, M') : \pi(m) \mapsto \left(g \mapsto \iota^{-1 \circ (g m - m)} \right).$$

3 октября, Г.Б. Шабат