

Дополнительный семинар 10. Классы сопряженности в $GL_3(\mathbb{F}_2)$

Задача 10.1. (а) Вычислите порядок группы $GL_2(\mathbb{F}_2)$;

(б) Постройте естественное действие на множестве ненулевых векторов в \mathbb{F}_2^2 ;

(в) Постройте вложение $GL_2(\mathbb{F}_2) \hookrightarrow S_3$;

(г) Элементы каких порядков встречаются в $GL_2(\mathbb{F}_2)$?

(д) Вычислите количество неподвижных векторов у элементов порядка 2 и 3 соответственно.

(е) Опишите классы сопряженности в $GL_2(\mathbb{F}_2)$.

Задача 10.2.

(а) Вычислите порядок группы $GL_3(\mathbb{F}_2)$ и постройте вложение этой группы в S_7 ;

(б) Перечислите классы сопряженности в S_7 , порядки элементов в которых делят порядок группы $GL_3(\mathbb{F}_2)$;

(в) Покажите, что цикловой тип перестановки, представляющей матрицу $A \in GL_3(\mathbb{F}_2)$ не может быть равен $(3, 1^4) := 3 + 1 + 1 + 1 + 1$;

Указание: любые 4 вектора содержат базис.

(г) Докажите, что также не могут встречаться цикловые типы $(2, 1^5)$, $(3, 2^2)$, $(4, 3)$,

(д) Тот же вопрос про цикловой тип $(4, 1^3)$;

Указание: Покажите, что если $A \in GL_3(\mathbb{F}_2)$ имеет неподвижную плоскость, то $A^2 = E$;

(е) Вычислите порядок и цикловой тип оператора $L_x \in GL_3(\mathbb{F}_2)$, заданного умножением на x в $\mathbb{F}_8 := \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$, рассматриваемое, как 3-мерное пространство над \mathbb{F}_2 .

(ж) Покажите, что наличие двух различных неприводимых многочленов степени 3 влечет существование по крайней мере двух классов сопряженности в $GL_3(\mathbb{F}_2)$, состоящих из элементов порядка 7;

(з) Сравните централизаторы у элементов порядка 7 в группах S_7 и $GL_3(\mathbb{F}_2)$ соответственно;

(и) Пусть оператор $A \in GL_3(\mathbb{F}_2)$ имеет неподвижный вектор. Дополните неподвижный вектор оператора A до базиса, оператор в факторпространстве имеет порядок 1, 2 или 3 по **Задаче 1** и опишите соответствующую степень оператора для каждого случая;

(к) Перечислите все возможные порядки и цикловые типы элементов в группе $GL_3(\mathbb{F}_2)$;

(л) Вычислите порядки классов сопряженности группы $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

(м) Докажите, что $GL_3(\mathbb{F}_2)$ – простая группа.