7. ФОРМУЛЫ УИТНИ.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, т.е. гладкое отображение, такое что $f'(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Точка $a \in \mathbb{R}^2$ называется точкой самопересечения f, если $|f^{-1}| \geq 2$; простой точкой самопересечения, если $|f^{-1}| \geq 2$, т.е. $f^{-1}(a) = \{t_1, t_2\}$. Простая точка самопересечения называется трансверсальной, если $f'(t_1)$ и $f'(t_2)$ не параллельны (линейно независимы). Пусть a — простая точка самопересечения, $t_1 < t_2$; если базис $(f'(t_1), f'(t_2))$ — правоориентированный, то пишем $\varepsilon(a) = +1$, иначе $\varepsilon(a) = -1$; это называется знаком точки a.

Пусть теперь $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, такая что $f(t) \equiv (t, 0)$ при $|t| \geq 1$, причем все точки вида $(t, 0)$, $|t| \geq 1$, не являются точками самопересечения f. Тогда $f' : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — замкнутая кривая с началом и концом в точке $b = (1, 0)$; ее класс гомотопии в $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, b) = \mathbb{Z}$ называется индексом кривой f и обозначается $\operatorname{ind}(f)$. Предположим также, что все точки самопересечения кривой f — простые и трансверсальные.

Задача 1. а) Докажите, что кривая f имеет конечное число точек самопересечения. б) Докажите теорему Уитни: сумма знаков точек самопересечения кривой f равна индексу кривой.

Указание (к обоим пунктам)**.** Рассмотрите отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $F(t, s) = f(t) - f(s)$.

Пусть теперь $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкая замкнутая кривая, то есть гладкое отображение, для которого $f'(t) \neq 0$ при всех t, $f(0) = f(1) \stackrel{\text{def}}{=} b$ и $f'(0) = f'(1)$. Предположим, что все точки самопересечения f — простые (уточните, что это значит) и трансверсальные, причем $f(0) = f(1)$ точкой самопересечения не является. Определим $\operatorname{ind}(f)$ и знаки точек самопересечения, как выше. Для произвольной точки $a \notin f(S^1) \subset \mathbb{R}^2$ пусть $\varrho_a \in \mathbb{Z}$ — класс замкнутой петли $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ в группе $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}, b) = \mathbb{Z}$.

Задача 2. Пусть a_1, a_2 — две точки, расположенные вблизи образа кривой $f(S^1)$, но по разные его стороны, далеко от точек самопересечения. Сформулируйте эти условия строго и докажите, что ϱ_{a_1} и ϱ_{a_2} отличаются на 1; уточните при этом знак.

Задача 3. Пусть b_+, b_- — точки, определенные как в задаче 2, и находящиеся вблизи точки $b = f(0) = f(1)$. Докажите формулу Уитни: $\operatorname{ind}(f)$ равен сумме знаков точек самопересечения, плюс $\varrho_{b_+} + \varrho_{b_-}$.