ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Когомологическое умножение: суперкоммутативность и вычисление для клеточных пространств.

Окончание доказательства следствия 1 из лекции 11: суперкоммутативность умножения $\cup$. Обозначим для удобства $\varepsilon_n \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n(n-1)/2}$ и $\kappa_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_n f \circ u_{n,n-1,\dots,0}$, где $f : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс. Совокупность отображений κ_n (для всех n) продолжается по линейности до морфизма комплексов $\kappa : C_\cdot(X, K) \to C_\cdot(X, K)$; символом $\kappa^* : C^\cdot(X, K) \to C^\cdot(X, K)$ обозначим двойственный морфизм.

Лемма 1. *Существует цепная гомотопия между κ и тождественным отображением.*

Суперкоммутативность умножения $\cup$ немедленно следует из леммы: пусть p, q — сингулярные коцепи размерностей m, n, а $f : \Delta_{m+n} \to X$ — сингулярный симплекс. Тогда $(\kappa^* p \cup \kappa^* q)(f) = \varepsilon_m \varepsilon_n p(f \circ u_{m,\dots,0}) q(f \circ u_{m+n,\dots,m})$, а $(\kappa^*(q \cup p))(f) = \varepsilon_{m+n}(q \cup p)(f \circ u_{m+n,\dots,0}) = \varepsilon_{m+n} q(f \circ u_{m+n,\dots,m}) p(f \circ u_{m,\dots,0})$. Поскольку $\varepsilon_{m+n} = (-1)^{(m^2+2mn+n^2-m-n)/2} = (-1)^{mn}(-1)^{(m^2-m)/2}(-1)^{(n^2-n)/2} = (-1)^{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n$, получается равенство $\kappa^* p \cup \kappa^* q = (-1)^{mn}\kappa^*(q \cup p)$. Согласно лемме 1, $\kappa^* = \mathrm{id}$ на когомологиях, откуда $p \cup q = (-1)^{mn}(q \cup p)$.

Доказательство леммы 1. Напомним, что a_j — вершина $x_j = 1$ стандартного симплекса Δ_n (для любого $n \ge j$). Вершину призмы $(a_j, 0) \in \Delta_n \times [0,1]$ обозначим v_j, а вершину $(a_j, 1) \in \Delta_n \times [0,1]$ — w_j. Для каждого $k = 0, \dots, n$ пусть $\mu_k : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1]$ — аффинное отображение, переводящее для каждого $j = 0, \dots, k$ вершину $a_j \in \Delta_{n+1}$ в v_j, а для каждого $j = k+1, \dots, n+1$ — в w_{n+k-j}. Как было доказано в лекции 2, симплексы $\mu_k(\Delta_{n+1})$ при $k = 0, \dots, n$ образуют триангуляцию призмы — покрывают ее, не имеют общих внутренних точек и пересечение образов μ_k и μ_ℓ либо является общей гранью обоих симплексов (если $\ell = k \pm 1$), либо пусто (в остальных случаях).

Пусть $f : \Delta_n \to X$ — сингулярный симплекс. Положим по определению $\psi_n(f) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{n-j} f \circ \pi \circ \mu_k \in C_{n+1}(X, K)$, где $\pi : \Delta_n \times [0,1] \to \Delta_n$ — проекция, и продолжим отображение ψ_n по линейности на все $C_n(X, K)$. Тогда прямое вычисление показывает, что совокупность отображений $\psi_n : C_n(X, K) \to C_{n+1}(X, K)$ — требуемая цепная гомотопия: $f + \kappa(f) = \partial\psi_n(f) + \psi_{n-1}(\partial f)$. □

□

Вычислим теперь умножение $\times$ в следующем случае: пусть $X_1 = \Delta_{n_1}$, $X_2 = \Delta_{n_2}$ — стандартные симплексы ($n_1, n_2 \ge 1$ — натуральные числа). Тогда $H^{n_1}(X_1, \partial X_1) = H^{n_2}(X_2, \partial X_2) = H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, \partial X_1 \times X_2 \cup X_1 \times \partial X_2) = K$: симплексы (и их произведения) гомеомофны шарам соответствующих размерностей. Поэтому в силу теоремы Борсука все гомологии в предыдущей формуле изоморфны $H^n(B_n, \partial B_n) = K$.

Предложение 1. *Отображение $\times : H^{n_1}(X_1, \partial X_1) \otimes H^{n_2}(X_2, \partial X_2) \to H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, \partial X_1 \times X_2 \cup X_1 \times \partial X_2)$ представляет собой умножение $K \otimes K \to K$ в кольце K.*

Окончание доказательства следствия 1 из лекции 11: суперкоммутативность умножения $\cup$. Отображение $\mathrm{id} : \Delta_{n_1} \to X_1$ — относительный цикл в $C_{n_1}(X_1, \partial X_1)$ (поскольку $\partial\Delta_n = \partial X_1$); его класс гомологий — образующая модуля $H_{n_1}(X_1, \partial X_1) = K$. Пусть $\varphi_1 \in C^{n_1}(X_1, \partial X_1)$ — коцикл, представляющий образующую модуля $H^{n_1}(X_1, \partial X_1) = K$. Из примера 2 лекции 11 следует, что $\langle\varphi, \mathrm{id}\rangle = 1$. Кроме того, поскольку φ_1 — относительный коцикл, имеет место равенство $\langle\varphi_1, f\rangle = 0$ для любого сингулярного симплекса $f : \Delta_n \to \partial X_1$. Аналогично определим $\varphi_2 \in C^{n_2}(X_2, \partial X_2)$.

Пусть $v_0, \dots, v_{n_1}$ — вершины симплекса X_1, $w_0, \dots, w_{n_2}$ — вершины X_2, а $a_0, \dots, a_{n_1+n_2}$ — вершины $\Delta_{n_1+n_2}$. Для каждого набора пар $I = \{(i_0, j_0), \dots, (i_{n_1+n_2}, j_{n_1+n_2})\}$ таких, что $i_0 \le i_1 \le \dots$, $j_0 \le j_1 \le \dots$ и $i_k + j_k = k$ при всех $k = 0, \dots, n_1 + n_2$ обозначим $u_I : \Delta_{n_1+n_2} \to X_1 \times X_2$ аффинное отображение, переводящее вершину a_k в (v_{i_k}, w_{j_k}) для всех k; образ $u_I(\Delta_{n_1+n_2}) \stackrel{\text{def}}{=} D_I$.

Лемма 2. *Каждое множество D_I — симплекс. Множества D_I образуют триангуляцию произведения $X_1 \times X_2$: их объединение $\bigcup_I D_I = X_1 \times X_2$, а пересечение симплексов $D_{I_1} \cap D_{I_2}$ является гранью (какой-нибудь размерности) каждого из симплексов. Сумма $u = \sum_I u_I$ — сингулярная цепь, представляющая образующую в $H_{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, \partial(X_1 \times X_2))$.*

Рассуждение в лекции 2 о триангуляции призмы — частный случай этой леммы ($n_2 = 1$); полное доказательство леммы такое же, как в этом частном случае (проделайте!).

Пусть $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ — проекции, и $\varphi_1 \in C^{n_1}(X_1, \partial X_1), \varphi_2 \in C^{n_2}(X_2, \partial X_2)$ — коциклы, классы которых являются образующими модулей $H^{n_1}(X_1, \partial X_1) = K$ и $H^{n_2}(X_2, \partial X_2) = K$. Согласно определению умножения $\cup$, $(p_1^*\varphi_1 \cup p_2^*\varphi_2)(u) = \sum_I \varphi_1(p_1 \circ u_{i_0,\dots,i_{n_1}})\varphi_2(p_2 \circ u_{j_{n_1},\dots,j_{n_1+n_2}}))$ (напомним, что аффинные отображения $u_{k_0,\dots,k_s}$ переводят m-ю вершину симплекса Δ_s в k_m-ю вершину симплекса-образа, для всех m). Для всех I, кроме одной, либо образ сингулярного симплекса $p_1 \circ u_{i_0,\dots,i_{n_1}}$ лежит в ∂X_1, либо образ сингулярного симплекса $p_2 \circ u_{j_{n_1},\dots,j_{n_1+n_2}}$ лежит в ∂X_2, так что значения соответствующих коцепей на них равны нулю. Единственное исключение — множество пар I такое, что $i_k = k$ при $k = 0, \dots, n_1$ и $j_{n_1+l} = l$ при $l = 0, \dots, n_2$. В этом случае значения обеих коцепи равны 1, согласно примеру 2 лекции 11. Отсюда вытекает требуемое утверждение. $\square$

Напомним, что для клеточного пространства X клеточной цепью размерности n называется элемент $a \in W_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = H_n(\operatorname{sk}_n(X)/\operatorname{sk}_{n-1}(X))$ (последнее равенство — по теореме Борсука); аналогично, элемент $\alpha \in W^n(X) = H^n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = H^n(\operatorname{sk}_n(X)/\operatorname{sk}_{n-1}(X))$ назовем клеточной коцепью. Поскольку $\operatorname{sk}_n(X)/\operatorname{sk}_{n-1}(X)$ — букет сфер размерности n, из примера 2 лекции 11 вытекает, что клеточная коцепь полностью определяется своими значениями на всевозможных цепях, состоящих из одной клетки, так что множество n-мерных клеточных коцепей можно считать множеством K-значных функций на множестве n-мерных клеток.

Пусть теперь X_1, X_2 — произвольные клеточные пространства; их произведение $X_1 \times X_2$ имеет каноническую структуру клеточного пространства, в котором клетками являются попарные произведения $e_i^{(n_1)} \times e_j^{(n_2)}$ клеток пространств X_1 и X_2 (это клетка размерности $n_1 + n_2$), характеристическое отображение $\chi_{ij} : B_{n_1+n_2} \to X_1 \times X_2$ равно $(\chi_i \times \chi_j) \circ u$, где $\chi_i : B_{n_1} \to X_1$ и $\chi_j : B_{n_2} \to X_2$ — характеристические отображения клеток $e_i^{(n_1)}$ и $e_j^{(n_2)}$, а $u : B_{n_1+n_2} \to B_{n_1} \times B_{n_2}$ — гомеоморфизм. Тогда $\operatorname{sk}_m(X_1 \times X_2) = \bigcup_{k=0}^n \operatorname{sk}_k(X_1) \times \operatorname{sk}_{m-k}(X_2)$, а дифференциал в гомологическом клеточном комплексе равен $\partial_m = \partial_m^{(1)} \times \mathrm{id}_{X_2} + \mathrm{id}_{X_1} \times \partial_m^{(2)}$. Тем самым операция $\times$ порождает билинейную операцию $W^{n_1}(X_1) \otimes W^{n_2}(X_2) \to W^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$ на клеточных коцепях. Из предложения 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $a \in W^{n_1}(X_1), b \in W^{n_2}(X_2)$ — клеточные коцепи. Тогда значение клеточной коцепи $a \times b \in W^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$ на клетке $e^{(n_1)} \times e^{(n_2)}$ пространства $X_1 \times X_2$ равно $a(e^{(n_1)})b(e^{(n_2)})$.*

Пример 1. Клеточное разбиение S^2 состоит из нульмерной клетки $e^{(0)}$ и двумерной $e^{(2)}$; отсюда вытекает, что клеточное разбиение $(S^2)^n$ содержит 2^n клеток вида $e_1^{(i_1)} \times \dots \times e_n^{(i_n)}$; здесь каждый индекс $i_k \in \{0, 2\}$, и $e_k^{(i_k)}$ — клетка $e^{(i_k)}$ из k-ой копии S^2.

Размерность клетки $e_1^{(i_1)} \times \dots \times e_n^{(i_n)}$ равна $i_1 + \dots + i_n$ и тем самым четна; отсюда вытекает, что в клеточных комплексах $\partial = 0$ и $\delta = \partial^* = 0$, так что $H_*((S^2)^n)$ и $H^*((S^2)^n)$ двойственны и изоморфны друг другу и изоморфны $(K^2)^{\otimes n}$. При этом образующие каждого из сомножителей K^2 имеют размерности 0 и 2.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^2((S^2)^n)$ — базис, двойственный к $e_1^{(2)}, \dots, e_n^{(2)} \in H_2((S^2)^n)$. Из следствия 1 вытекает, что при $u_1 < \dots < u_k$ клеточная коцепь (коцикл) $\alpha_{u_1} \times \alpha_{u_k}$ равен 1 на клетке $e_1^{(i_1)} \times \dots \times e_n^{(i_n)}$, где $i_s = 2$, если $s \in \{u_1, \dots, u_k\}$ и $i_s = 0$ в противном случае, и равен нулю на всех остальных клетках. Следовательно, $\alpha_{u_1} \times \dots \times \alpha_{u_k}$ — базис в $H^*((S^2)^n)$, двойственный к $e_1^{(i_1)} \times \dots \times e_n^{(i_n)} \in H_*((S^2)^n)$, и алгебра $H^*((S^2)^n)$ изоморфна $K[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0) = (K[x]/(x^2 = 0))^{\otimes n}$; при этом степень каждой из образующих x_k равна 2.