ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Гомологии графов.

Напомним, что *конечным графом* называется топологическое пространство, порожденное склеиванием некоторого конечного множества отрезков по какому-нибудь отождествлению их концов. Склеиваемые отрезки называются ребрами графа, а образы их концов при склеивании — вершинами.

Пусть Γ — граф (мы будем опускать слово "конечный", т.к. других графов не рассматриваем). Зафиксируем ассоциативное коммутативное кольцо с единицей K — например, $K = \mathbb{Z}$, или $K = k$ — поле, или $K = k[H]$ — групповое кольцо группы H с коэффициентами в поле k. Сопоставим графу Γ два K-модуля (при $K = \mathbb{Z}$ — две абелевых группы, если же K — поле, то два векторных пространства; если $K = k[H]$, то два представления группы H над полем k, и т.п.), M_0^Γ и M_1^Γ, и гомоморфизм $\partial_\Gamma : M_1^\Gamma \to M_0^\Gamma$ между ними. Группа M_0 (опустим индекс $^\Gamma$) — свободный K-модуль порожденный вершинами графа, M_1 — то же самое, ребрами. Элементы M_i называются i-цепями ($i = 0, 1$).

Чтобы определить гомоморфизм ∂, ориентируем каждое ребро e: пусть его начало — вершина a, а конец — вершина b (может быть $b = a$). Тогда по определению положим $\partial(e) = b - a \in M_0$; поскольку модуль M_1 — свободный, такое отображение однозначно продолжается до гомоморфизма $\partial : M_1 \to M_0$. Обозначим: $H_1(\Gamma, K) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial$ (*K-модуль первых гомологий графа*), $B \stackrel{\text{def}}{=} \partial(M_1) \subset M_0$ (модуль 0-границ) и $H_0(\Gamma, K) = M_0/B \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Coker} \partial$ (*K-модуль нулевых гомологий графа*). Если $K = \mathbb{Z}$, то модули (цепей, гомологий и т.п.) это абелевы группы; если $K = k$ — поле, то это векторные пространства, если $K = k[H]$ — групповая алгебра группы H, то это представления группы H над полем k.

Как нетрудно видеть, от ориентации ребер графа его гомологии не зависят. Точнее говоря, пусть $\partial : M_1 \to M_0$ и $\partial' : M_1 \to M_0$ — гомоморфизмы, отвечающие двум различным ориентациям ребер графа. Определим гомоморфизм модулей $\varepsilon : M_1 \to M_1$ на произвольном ребре e так: $\varepsilon(e) = e$, если ребро e в обоих случаях ориентировано одинаково, и $\varepsilon(e) = -e$, если оно ориентировано по-разному.

Предложение 1. *Имеет место равенство $\partial'\varepsilon = \partial$. Гомоморфизм ε изоморфно отображает H_1 на $H_1' \stackrel{def}{=} \operatorname{Ker}(\partial')$. При этом $B = B' \stackrel{def}{=} \partial'(M_1)$, и тем самым $H_0 = H_0' \stackrel{def}{=} M_0/B'$.*

Доказательство — упражнение.

Теорема 1. *0-цепь $\sum_{u \in \Gamma} x_u u \in M_0(\Gamma)$ (где $x_u \in K$, u — вершина графа) является 0-границей тогда и только тогда, когда для любой компоненты линейной связности $\Gamma_i \subset \Gamma$ имеет место равенство $\sum_{u \in \Gamma_i} x_u = 0$.*

Доказательство. Если e — ребро, соединяющее вершины a и b, то эти вершины принадлежат одной компоненте связности. Следовательно, $\partial e = b - a$ — 0-цепь, удовлетворяющая условию теоремы. Любой элемент B является линейной комбинацией таких цепей с коэффициентами в K и, следовательно, тоже удовлетворяет условию.

Обратно, пусть $w = \sum_{u \in \Gamma} x_u u \in M_0(\Gamma)$ — 0-цепь, удовлетворяющая условию. Пусть Γ_i, $i = 1, \dots, s$ — компоненты связности графа Γ, тогда $w = \sum_{i=1}^s w_i$, где $w_i = \sum_{u \in \Gamma_i} x_u u$, причем каждая w_i тоже удовлетворяет условию. Тем самым достаточно доказать теорему для каждой w_i — иными словами, в случае, когда граф Γ связен.

Проведем индукцию по количеству $n = \#\{u \in \Gamma \mid x_u \neq 0\}$ вершин, входящих в сумму с ненулевым коэффициентом. Если $n \le 1$, то $n = 0$, то есть $w = 0$ и теорема доказана. Пусть теперь для цепей, содержащих меньше чем n вершин, теорема доказана. Выделим вершины $u_1, u_2 \in \Gamma$ такие, что $x_{u_1}, x_{u_2} \neq 0$. Поскольку Γ связен, существует путь, соединяющий u_1 и u_2, т.е. последовательность ребер $e_1, \dots, e_m$ такая, что e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, $i = 1, \dots, m$, причем $v_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_1$ и $v_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} u_2$. Тогда $w = w' + x_{u_1}(u_1 - u_2)$, где $w' = \sum_{u \neq u_1, u_2} x_u u + (x_{u_2} + x_{u_1}) u_2$. Цепь w', очевидно, удовлетворяет условию (сумма коэффициентов та же, что у w) и содержит не более $n - 1$ вершин с ненулевыми коэффициентами, и по предположению индукции $w' = \partial r$ для некоторой 1-цепи $r \in M_1(\Gamma)$. В то же время $u_2 - u_1 = \partial(e_1 + \dots + e_m)$, откуда вытекает, что $w = \partial(r + x_{u_1}(e_1 + \dots + e_m)) \in B$, и теорема доказана по индукции. □

Следствие 1. *$H_0(M(\Gamma)) = K^c$, где c — количество компонент линейной связности графа Γ. Если u_i — произвольная вершина компоненты связности Γ_i, то 0-цепи $\delta_{u_i} \stackrel{def}{=} u_i$, $i = 1, \dots, s$, составляют базис в $H_0(\Gamma, K)$.*

Пусть теперь Γ' — граф, полученный из Γ добавлением новой вершины a в середине ребра e, соединяющего вершины b и c ($b = c$ не исключается); новая вершина имеет валентность 2. Рассмотрим теперь $g_0 : M_0(\Gamma) \to M_0(\Gamma')$, $h_0 : M_0(\Gamma') \to M_0(\Gamma)$, $g_1 : M_1(\Gamma) \to M_1(\Gamma')$, $h_1 : M_1(\Gamma') \to M_1(\Gamma)$, определенных следующим образом:

- $g_0(v) = v$ для всякой вершины v графа Γ (она же является и вершиной графа Γ').
- $h_0(v) = v$ для всякой вершины $v \neq a$ графа Γ' (она же является и вершиной графа Γ); $h_0(a) = b$.
- $g_1(p) = p$ для всякого ребра $p \neq e$ графа Γ; $g_1(e) = e' + e''$, где e', e'' — ребра графа Γ', примыкающие к вершине a (e' соединяет b и a, а e'' — a и c).
- $h_1(p) = p$ для всякого ребра $p \neq e$ графа Γ (оно же является и ребром графа Γ); $h_1(e') = 0$ и $h_1(e'') = e$.

Лемма 1. *1) Диаграммы* $\begin{array}{ccc} M_1(\Gamma) & \xrightarrow{\partial_\Gamma} & M_0(\Gamma) \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 \\ M_1(\Gamma') & \xrightarrow{\partial_{\Gamma'}} & M_0(\Gamma') \end{array}$ *и* $\begin{array}{ccc} M_1(\Gamma) & \xrightarrow{\partial_\Gamma} & M_0(\Gamma) \\ \uparrow h_1 & & \uparrow h_0 \\ M_1(\Gamma') & \xrightarrow{\partial_{\Gamma'}} & M_0(\Gamma') \end{array}$ *коммутативны.*

2) Отображение g_0 переводит $B(\Gamma)$ в $B(\Gamma')$, а отображение h_0 — в обратную сторону; следовательно, определены отображения $(g_0)_* : H_0(\Gamma) = M_0(\Gamma)/B(\Gamma) \to M_0(\Gamma')/B(\Gamma') = H_0(\Gamma')$ и $(h_0)_* : H_0(\Gamma') \to H_0(\Gamma)$. Отображение g_1 переводит $H_1(\Gamma)$ в $H_1(\Gamma')$, а h_1 — в обратную сторону; ограничения на $H_1(\Gamma)$, $H_1(\Gamma')$ будут обозначаться $(g_1)_*$ и $(h_1)_*$.

Доказательство — упражнение. Пара отображений $u_0 : M_0(\Gamma) \to M_0(\Gamma')$ и $u_1 : M_1(\Gamma) \to M_1(\Gamma')$, для которых соответствующая диаграмма коммутативна, будет называться морфизмом графов; как нетрудно видеть, для любого морфизма выполнены утверждения пункта 2 леммы и, следовательно, определены морфизмы гомологий $(u_i)_* : H_i(\Gamma) \to H_i(\Gamma')$, $i = 0, 1$.

Предложение 2. *Отображения $(g_0)_*$ и $(h_0)_*$, а также $(g_1)_*$ и $(h_1)_*$ взаимно обратны и, следовательно, являются изоморфизмами соответствующих гомологий.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что $(g_*)_0$ переводит базис в $H_0(\Gamma)$ в “одноименный” базис в $H_0(\Gamma')$ и, следовательно, является изоморфизмом. Тем же свойством обладает $(h_*)_0$, если в качестве базисной цепи в компоненте, содержащей добавленную вершину a, выбрать цепь u, где $u \neq a$.

Пусть теперь $W = \sum_{p \neq e} y_p p + ye \in \mathrm{Ker}(\partial_\Gamma) = H_1(\Gamma)$; тогда $g_1(W) = \sum_{p \neq e} y_p p + y(e' + e'') \in M_1(\Gamma')$ лежит в ядре $\partial_{\Gamma'}$; как нетрудно видеть, $(h_1 \circ g_1)(W) = W$. С другой стороны, если $Z = \sum_{p \neq e', e''} y_p p + z_1 e' + z_2 e'' \in \mathrm{Ker}(\partial_{\Gamma'})$, то $0 = \partial'(Z) = \sum_{u \neq a} x_u u + (z_1 - z_2)a$ для некоторых $x_u \in K$, откуда $z_1 = z_2$. Следовательно, $h_1(Z) = \sum_{p \neq e} y_p p + z_1 e \in M_1(\Gamma)$ лежит в ядре ∂_Γ; имеем $(g_1 \circ h_1)(Z) = Z$. Тем самым отображения $(g_1)_* : H_1(\Gamma) \to H_1(\Gamma')$ и $(h_1)_* : H_1(\Gamma') \to H_1(\Gamma)$ взаимно обратны. □

Пусть $F : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — непрерывное отображение графов, пусть Γ_2' — граф, полученный из Γ_2 добавлением вершин во всех точках $F(a)$, где a — вершина Γ_1. Согласно предложению 2, существуют канонические изоморфизмы $(h_i)_* : H_i(\Gamma_2') \to H_i(\Gamma_2)$, $i = 0, 1$; поэтому будем считать, что $\Gamma_2 = \Gamma_2'$ — иными словами, что F переводит вершины в вершины.

Определим теперь морфизмы K-модулей $F_i : M_i(\Gamma_1) \to M_i(\Gamma_2)$, $i = 0, 1$. Для произвольной вершины a графа Γ_1 положим $F_0(\delta_a) = \delta_{F(a)}$ (напомним, что $\delta_a = a \in H_0(\Gamma)$ — образ элемента $a \in M_0$ при факторизации $M_0 \mapsto M_0/B$); это отображение продолжается по линейности до морфизма K-модулей F_0.

Поскольку M_1 — свободный K-модуль (при $K = \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа), порожденная ребрами графа, гомоморфизм модулей $F_1 : M_1(\Gamma_1) \to M_1(\Gamma_2)$ задается формулой $F_1(\sum_e u_e e) = \sum_{e,f} x_{ef} u_e f$, где e пробегает множество ребер графа Γ_1, а f — множество ребер графа Γ_2. Чтобы определить элемент $x_{ef} \in K$, обозначим $\Gamma_1[e_1]$ топологическое пространство, полученное стягиванием в графе Γ_1 всех ребер, кроме e_1; аналогично $\Gamma_2[e_2]$. Эти пространства представляют собой окружности с отмеченной точкой a_1 (соотв., a_2), в которую стянуты все точки графа, не лежащие на соответствующем ребре. Определим отображение $F[e_1, e_2] : \Gamma_1[e_1] \to \Gamma_2[e_2]$ следующим образом:

$$F[e_1, e_2](x) = \begin{cases} F(x), & x \in e_1, F(x) \in e_2, \\ a_2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь под e_1 (соотв., e_2) имеется в виду как подмножество Γ_1, так и множество $\Gamma_1[e_1] \setminus \{a_1\}$ (соотв., Γ_2 и $\Gamma_2[e_2] \setminus \{a_2\}$). Как нетрудно убедиться, $F[e_1, e_2]$ непрерывно и переводит a_1 в a_2; тем самым оно представляет собой петлю на окружности $\Gamma_2[e_2]$ с началом и концом в точке a_2. Класс гомотопии ξ этой петли принадлежит $\pi_1(\Gamma_2[e_2], a_2) = \mathbb{Z}$; положим по определению $x_{ef} = \xi \cdot 1$, где $1 \in K$ — единица кольца K.

Теорема 2. *1) Пара гомоморфизмов модулей (F_0, F_1) представляет собой морфизм графов.*

2) Если отображения $F : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ и $F' : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ гомотопны, то $(F_0)_* = (F_0')_*$ и $(F_1)_* = (F_1')_*$.

Следствие 2. *Если $F : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ — гомотопическая эквивалентность, то отображения $(F_0)_*$ и $(F_1)_*$ представляют собой изоморфизмы соответствующих гомологий (как K-модулей).*

Следствие 3 (следствия 2). *Если граф* Γ *содержит* n *вершин,* m *ребер и* c *компонент связности, то* $H_1(\Gamma) = K^{m-n+c}$ *(свободный* K*-модуль ранга* $m - n + c$*).*

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем ребро e графа Γ_1 с концами в вершинах a и b, и пусть $F_1(e) = \sum_f x_f f$, где f пробегает все ребра графа Γ_2. Утверждение 1 теоремы означает, что $\partial_2 F_1 = F_0 \partial_1$, где $\partial_i : M_1(\Gamma_i) \to M_0(\Gamma_i)$ — стандартный гомоморфизм, $i = 1, 2$. Применяя это равенство к ребру e, получим в правой части 0-цепь $F(b) - F(a) \in M_0(\Gamma_2)$. Пусть c — произвольная вершина графа Γ_2, и $f_1, \dots, f_m$ — ребра, содержащие эту вершину; без ограничения общности считаем (предложение 1), что все ребра направлены к вершине c. Тогда утверждение теоремы эквивалентно тому, что

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \begin{cases} 1, & c = F(b), c \neq F(a), \\ -1, & c = F(a), c \neq F(b), \\ 0 & \text{в остальных случаях (в частности, если } F(a) = F(b)), \end{cases}$$

где для краткости обозначено $y_i \stackrel{\text{def}}{=} x_{ef_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть вначале $c \neq F(a), F(b)$. Обозначим $\Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$ пространство, полученное стягиванием в точку d всех точек графа Γ_2, кроме точек, лежащих на ребрах $f_1, \dots, f_m$. Это пространство представляет собой граф с двумя вершинами (c и d) и соединяющими их m ребрами, которые естественно тоже назвать $f_1, \dots, f_m$; обозначим также $p_i : \Gamma_2[f_1, \dots, f_m] \to \Gamma_2[f_i]$ естественное отображение факторизации (стягивания), здесь $i = 1, \dots, m$. Отображение $F[e; f_1, \dots, f_m] : \Gamma_1[e] \to \Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$, заданное формулой

$$F[e; f_1, \dots, f_m](x) = \begin{cases} F(x), & x \in e, F(x) \in f_1 \cup \dots \cup f_m, \\ d & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

непрерывно, переводит a_1 в d (тем самым представляет собой петлю в пространстве $\Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$ с началом и концом в точке d) и удовлетворяет соотношению $p_i \circ F[e; f_1, \dots, f_m] = F[e, f_i]$ при всех $i = 1, \dots, m$. Если отображение F заменить гомотопным ему, причем гомотопия $F_t : \Gamma_1 \to \Gamma_2$, $0 \le t \le 1$, неподвижна на вершинах графа Γ_1, то гомоморфизмы F_0 и F_1 не изменятся (проверьте!) и, следовательно, на справедливость теоремы это не повлияет.

Лемма. *Любое непрерывное отображение* $G_0 : \Gamma_1[e] \to \Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$*, переводящее* a_1 *в* d*, гомотопно отображению* G_1*, в котором ребро* e *разбито на* N *равных отрезков* $[u_j, u_{j+1}]$*, причем* $G_1(u_j) = d$ *и* $G_1((u_j + u_{j+1})/2) = c$ *для всех* j*, и для каждого* j *существует* $\ell_j = 1, \dots, m$ *такое, что либо* $G_1(t)$ *линейно отображает левую половину отрезка* $[u_j, u_{j+1}]$ *(т.е. отрезок* $[u_j, (u_j + u_{j+1})/2]$*) в ребро* f_{ℓ_j}*, а правую половину — в ребро* f_1 *(назовем это случай А), либо наоборот (это случай В). Гомотопия* G_t *может быть выбрана неподвижной в точке* a_1*.*

Доказательство леммы — упражнение, для решения которого нужно рассмотреть универсальное накрытие над графом $\Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$; оно представляет собой бесконечное дерево, каждая вершина которого покрашена в один из двух цветов (c или d) и в каждой вершине сходятся m ребер, пронумерованных числами от 1 до m. Решение упражнение заключается в доказательстве того, что каждое отображение окружности с отмеченной точкой в такой граф гомотопно кусочно-линейному отображению (линейному на прообразе каждого из ребер).

Пусть теперь $G_0 = F[e; f_1, \dots, f_m]$ и пусть G_t — гомотопия из леммы; соответственно, $Q_t \stackrel{\text{def}}{=} p_i \circ G_t$ — гомотопия отображений $\Gamma_1[e] \to \Gamma_2[f_i]$, для которой $Q_0 = F[e, f_i]$. Тогда $y_i = y_i(Q_1)$ при $i = 2, \dots, m$ равно количеству отрезков (для отображения Q_1), в которых $\ell_j = i$ и имеет место случай А, минус количество отрезков, в которых $\ell_j = i$ и имеет место случай В. Число y_1 равно количеству отрезков, где имеет место случай В, минус количество отрезков, где имеет место случай А (вне зависимости от ℓ_j). Отсюда немедленно вытекает равенство $y_1 + \dots + y_m = 0$.

Подробное рассмотрение случаев, когда $c = F(a)$ или $c = F(b)$ предоставляется читателю; основное отличие в том, что вспомогательное пространство $\Gamma_2[f_1, \dots, f_m]$ в этом случае представляет собой не граф с двумя вершинами, а букет окружностей (т.е. граф с одной вершиной — потому что вершины c и d склеиваются).

Тем самым утверждение 1 теоремы доказано.

Основная трудность доказательстве утверждения 2 состоит в том, что при гомотопии F_t образы вершин графа Γ_1 не остаются постоянными и тем самым не всегда расположены в вершинах графа Γ_2. Для каждой вершины a графа Γ_1 обозначим $X_a \subset [0, 1]$ множество $t \in [0, 1]$ таких, что $F(a)$ не является вершиной графа Γ_2. Для произвольного набора $a_1, \dots, a_m$ вершин обозначим $X_{a_1,\dots,a_m} = \bigcap_{i=1}^m X_{a_i} \cap \bigcap_{a \neq a_1,\dots,a_m} \operatorname{int}(\overline{X}_a)$; здесь черта сверху обозначает дополнение к множеству, а int — внутренность. Множество $X_{a_1,\dots,a_m} \subset [0, 1]$ открыто и, следовательно, представляет собой конечное или счетное объединение непересекающихся интервалов. Для доказательства утверждения 2 достаточно доказать, что отображения $((F_t)_i)_*$, $i = 0, 1$, остаются постоянными, когда t меняется на замыкании $[p, q]$ любого такого интервала (p, q).

При $t \in (p, q)$ точки $F_t(a_1), \ldots, F_t(a_m)$ не являются вершинами графа Γ_2, а точки $F_t(a)$ для произвольной вершины $a \neq a_1, \ldots, a_m$ — являются; при этом $F_p(a_j)$ и $F_q(a_j)$ могут быть вершинами Γ_2 для некоторых $j = 1, \ldots, m$. Предположим для простоты, что $F_p(a_j) \overset{\text{def}}{=} c$ — вершина только при $j = 1$ (общий случай рассматривается аналогично), а при $t \in (p, q)$ точка $F_t(a_1)$ лежит на ребре (cd). Пусть Γ_2' — граф, полученный из Γ_2 добавлением вершины $F(a_1) \in (cd)$, и пусть (h_0, h_1) — морфизм графа Γ_2' в граф Γ_2, описанный перед леммой 1 и задающий, согласно предложению 2, изоморфизм в гомологиях. Из формул для h_0, h_1 (где считается, что $(c, F_t(a_1))$ — ребро e', а $(F_t(a_1), d)$ — ребро e'') вытекает, что отображения $h_i \circ (F_t)_i : M_i(\Gamma_1) \to M_i(\Gamma_2)$, $i = 0, 1$, остаются постоянными при $t \in [p, q)$ — следовательно, не меняются при таких t и отображения $(h_i \circ (F_t)_i)_* = (h_i)_* \circ ((F_t)_i)_*$, $i = 0, 1$. Поскольку $(h_i)_*$ — изоморфизм модулей, неизменными остаются и сами отображения $((F_t)_i)_*$, $i = 0, 1$, $t \in [p, q)$. Аналогичное рассуждение показывает, что эти отображения не меняются при $t \in (p, q]$ и, следовательно, при $t \in [p, q]$.

Тем самым теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 3. Если e — ребро графа Γ, не являющееся петлей, то граф Γ/e (со стянутым ребром Γ) гомотопически эквивалентен Γ (это доказывалось в одной из задач 1 семестра) и содержит на одно ребро и на одну вершину меньше; число компонент связности не меняется. Применяя это соображение нужное количество раз, получим, что каждый граф гомотопически эквивалентен дизъюнктному объединению c графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_c$, где для каждого i граф Γ_i содержит 1 вершину и $m_i - n_i + 1$ ребер, где m_i, n_i — количество ребер и вершин в i-й связной компоненте первоначального графа Γ. Тем самым каждый граф Γ_i — букет $m_i - n_i + 1$ окружностей, откуда $H_1(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{c} H_1(\Gamma_i) = K^{\sum_{i=1}^{c}(m_i - n_i + 1)} = K^{m-n+c}$. $\square$