Самостоятельная работа. 8 октября 2014

Задача 1. Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (y, x - y^2)$.

а) Докажите, что это отображение есть диффеоморфизм плоскости.

б) Вычислите $F^*\alpha$ и $(F^{-1})^*\alpha$, для дифференциальных форм $\alpha = xdy - ydx$ и $\alpha = dx \wedge dy$.

Задача 2. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = dx\wedge dy + x^2 dz\wedge dy - (x+y)dz\wedge dx$.

а) Вычислите ее значение на касательных векторах $v_1 = 3\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ и $v_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}$ в точке $(1,1,1)$.

б) Вычислите форму $i_v\omega$ для векторного поля $v = 3y\frac{\partial}{\partial x} - 2z\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.

в) Определите ядро дифференциальной формы в точке многообразия и вычислите ядро формы ω в точке $(1,-2,3)$.

Задача 3. Рассмотрим отображение плоскости в плоскость, зависящее от параметра ε: $F_\varepsilon(x,y) = (2x - y + \varepsilon(1+xy), -y - \varepsilon x^2)$. Докажите (или опровергните), что при малых ε у F_ε есть неподвижная точка $z(\varepsilon)$, гладко зависящая от параметра ε и обращающаяся в ноль при $\varepsilon = 0$.