Анализ на многообразиях. Листок 5. 29 октября 2014

Задача 1. Вычислите производную Ли вдоль поля $\frac{\partial}{\partial x_1}$ от формы $\sum f_{i_1 i_2 .. i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Задача 2. Докажите, что $L_v(\alpha \wedge \beta) = (L_v \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_v \beta$.

Задача 3. Пусть g^t однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, $v = \frac{dg^t}{dt}|_{t=0}$ ее поле скоростей. Докажите, что если $L_v \alpha = 0$, то $(g^t)^* \alpha = \alpha$ для любого t.

Задача 4. Рассмотрим дифференциальную 1-форму α и векторные поля v, u. Проверьте (или опровергните) равенство $L_v(\alpha(u)) = (L_v \alpha)(u) + \alpha([v, u])$.

Задача 5. Рассмотрим дифференциальную 1-форму α и векторные поля v, u. Проверьте (или опровергните) равенство $d\alpha(u, v) = L_v(\alpha(u)) - L_u(\alpha(v)) - \alpha([u, v])$.

Задача 6. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве с координатами (x, y, z) график функции $f(x, y)$. Выпишите форму площади в координатах (x, y).

Задача 7. Рассмотрим двумерную сферу $\{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и описанный вокруг нее прямой круговой цилиндр $\{x^2 + y^2 = a^2, |z| \leq a\}$. Для точки x сферы, отличной от полюсов $(0, 0, \pm a)$, рассмотрим луч с началом на оси аппликат (так называется ось Oz), ортогональный ей, и проходящий через точку x. Отобразим x в точку пересечения этого луча с цилиндром. Докажите, что построенное отображение из сферы без двух точек в цилиндр сохраняет площадь.

Задача 8. Докажите, что $S^n, T^n, \mathbb{C}P^n$ ориентируемы при любом n, а $\mathbb{R}P^n$ только при нечетном n.

Задача 9. Рассмотрим ориентируемое многообразие M и гладкое отображение $M \to N$. Докажите, что прообраз регулярного значения является ориентируемым многообразием?

Задача 10. Что можно сказать об ориентируемости декартова произведения двух многообразий?