Анализ на многообразиях. Листок 2. 17 сентября 2014

Задача 1. Рассмотрим вращение сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ вокруг оси x с единичной скоростью. Выпишите поле скоростей этого вращения в стереографической карте сферы, проходящей через точку а) (1,0, 0); б) (0,0,1).

Задача 2. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как стандартную аффинную карту $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим линейное векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Можно ли его продолжить до векторного поля на $\mathbb{R}P^n$? Если можно, то будет ли продолженное поле касаться бесконечно-удаленного проективного подпространства $\mathbb{R}P^{n-1}$?

Задача 3. Докажите, что полноторие (произведение окружности на открытый диск) диффеоморфно многообразию $SL(2, \mathbb{R})$.

Задача 4. Докажите, что если два подмногообразия пересекаются трансверсально, то их пересечение является подмногообразием.

Задача 5. Докажите, что матрицы размера $n \times n$ с определителем равным единице образуют подмногообразие (обозначаемое $SL(n, \mathbb{R})$) в пространстве всех матриц. Опишите касательное пространство $T_E SL(n, \mathbb{R})$.

Задача 6. Докажите, что ортогональные матрицы размера $n \times n$ образуют подмногообразие (обозначаемое $O(n)$) в пространстве всех матриц и найдите его размерность. Опишите касательное пространство $T_E O(n)$.

Задача 7. Рассмотрим сферу $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, заданную уравнением $\sum x_i^2 = 1$. Найдите на $\mathbb{R}^{2n}$ гладкое векторное поле, касающееся S^{2n-1} и отличное от нуля в любой точке $x \in S^{2n-1}$.