Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 9

Задача 1. Приведите пример подалгебры A в $\mathbb{K}[x,y]$, которая целозамкнута, но не факториальна.

Задача 2. Опишите нормализацию $\pi\colon X_{\mathrm{norm}} \to X$ аффинного многообразия
$$X = Z(x_1^2x_3 - x_2^2) \subseteq \mathbb{A}^3.$$
Является ли морфизм π биективным?

Задача 3. Пусть X и Y – неприводимые аффинные многообразия и $\phi\colon X \to Y$ – доминантный морфизм. Докажите, что существует единственный морфизм $\phi_{\mathrm{norm}}\colon X_{\mathrm{norm}} \to Y_{\mathrm{norm}}$, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathrm{norm}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{norm}}"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y_{\mathrm{norm}} \arrow[d, "\pi_Y"'] \\
X \arrow[r, "\phi"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Задача 4. Пусть A – такая область, что для любого $\alpha \in QA$ выполнено $\alpha \in A$ или $\alpha^{-1} \in A$.

a) Докажите, что A целозамкнута.
b) Докажите, что A содержит единственный максимальный идеал.
c) Приведите примеры таких областей A не являющихся полями.

Задача 5. Приведите пример сюръективного морфизма неприводимых аффинных многообразий $\phi\colon X \to Y$ с конечными слоями, который не является конечным.

Задача 6. Пусть A – подалгебра в $\mathbb{K}[x,y]$, порожденная мономами $x^{i_1}y^{j_1}, \ldots, x^{i_k}y^{j_k}$. Рассмотрим целые точки $p_1 = (i_1, j_1), \ldots, p_k = (i_k, j_k)$ in $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$, полугруппу $S = \{a_1p_2 + \ldots + a_kp_k \,|\, a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, группу $C = \{b_1p_2 + \ldots + b_kp_k \,|\, b_i \in \mathbb{Z}\}$ и конус $K = \{\lambda_1p_2 + \ldots + \lambda_kp_k \,|\, \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

a) Алгебра A целозамкнута.
b) Для любых $c \in C$ и $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ условие $nc \in S$ влечет $c \in S$.
c) Имеет место равенство $S = C \cap K$.