Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 11

Задача 1. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{A_n}$ относительно естественного действия группы четных подстановок A_n перестановками переменных.

Задача 2. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле. Существует ли подгруппа $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, для которой алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x, y]^G$ совпадает с подалгеброй $\mathbb{K}[xy, y]$?

Задача 3. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\varepsilon \in \mathbb{C}$ – первообразный корень степени n из единицы. Рассмотрим группу G, порожденную преобразованием $x_1 \to \varepsilon x_1, x_2 \to \varepsilon x_2$. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $\varepsilon \in \mathbb{C}$ – первообразный корень степени n из единицы. Рассмотрим группу G, порожденную преобразованием $x_1 \to \varepsilon x_1, x_2 \to \varepsilon^{-1} x_2$. Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и G – группа третьего порядка, порожденная преобразованием

$$x_1 \to -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad x_2 \to -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$$

Найдите образующие алгебры инвариантов $\mathbb{R}[x_1, x_2]^G$.

Задача 6. Предположим, что конечная группа G совпадает со своим коммутантом. Докажите, что алгебра $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ факториальна. Верно ли обратное утверждение?