Топология, 2-й курс. Листок 4. Точная последовательность расслоения. 28 сентября 2011

1. Докажите, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n \geq 2$.

2. а) Докажите, что $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.
б) Докажите, что $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3)$ при $n \geq 3$.

3. Дано расслоение $E \to B$ со слоем F. Докажите, что если пространство E стягиваемо, то $\pi_n(B) \cong \pi_{n-1}(F)$.

4. Постройте расслоение $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1 и докажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}$ и $\pi_n(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $n \neq 2$.

5. Пусть X — пространство единичных касательных векторов к Y — сфере с g ручками. Постройте расслоение $X \to Y$ со слоем S^1 и попытайтесь вычислить $\pi_1(X)$ с помощью точной последовательности этого расслоения.

6. Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

Предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ — изоморфизмы. Докажите, что тогда φ_3 тоже изоморфизм.

7. Докажите, что если в задаче 6 диаграмма коммутативна с точностью до знака (т.е. выполняются не соотношения вида $fg = uv$, а соотношения вида $fg = \pm uv$), то утверждение всё равно остаётся верным.

8. В задаче 6 есть 8 предположений: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ — эпиморфизмы, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ — мономорфизмы. Для доказательства того, что φ_3 — эпиморфизм (мономорфизм), используются лишь 3 из них. Какие именно?

9. Пусть $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ — точная последовательность абелевых групп. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(а) эта последовательность имеет вид

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0,$$

где i — естественное вложение, p — естественная проекция;

(б) гомоморфизм φ имеет левый обратный, т.е. существует гомоморфизм $\Phi : B \to A$, для которого $\Phi\varphi = \mathrm{Id}_A$;

(в) гомоморфизм ψ имеет правый обратный, т.е. существует гомоморфизм $\Psi : C \to B$, для которого $\psi\Psi = \mathrm{Id}_C$.

10. Дано расслоение $p : E \to B$ со слоем F. Докажите, что если существует сечение $s : B \to E$ (т.е. $p \circ s = \mathrm{Id}_B$ — тождественное отображение B), то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.

11. Дано расслоение $p : E \to B$ со слоем F. Докажите, что если существует ретракция $r : E \to F$, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.

12. Дано расслоение $p : E \to B$ со слоем F. Докажите, что если слой F стягиваем в пространстве E, то $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.