# Билинейные симметрические формы

Мы продолжаем классифицировать симметрические билинейные формы на конечномерных векторных пространствах с точностью до изометрии.

**Определение 1**. Пусть $V$ — векторное пространство над полем $F$. Определим *двойственное пространство* $V^*$, как векторное пространство, составленное *функционалами* на $V$ — линейными отображениями из $V$ в $F$.

Фактически, билинейная форма — это линейное отображение из $V$ в двойственное пространство $V^*$, переводящее $v$ в функционал $u \to (u, v)$. А если выбрать базис в $V$ и двойственный базис в $V^*$, то матрица этого отображения будет в точности матрицей Грама формы.

**Определение 2**. Пусть $f : U \to V$ — линейное отображение. Определим *двойственное отображение* $F^* : V^* \to U^*$, переводящее функционал $\phi : V \to F$ в функционал $\phi \circ f : U \to F$.

**Упражнение 1** *Пусть $V$ конечномерно. Отождествим $V^{**}$ с $V$ с помощью естественного отображения. Тогда двойственное отображение к описанному выше переводит $v$ в функционал $u \to (v, u)$.*

Напомним, что билинейная форма на $V$ называется симметрической, если $(u, v) = (v, u)$ для всех $u$, $v \in V$. Фактически, это условие самодвойственности отображения $V \to V^*$.

Также напомним, что ортогональная прямая сумма пространств $V_1$ и $V_2$ с билинейными формами — пространство $V_1 \oplus V_2$ с билинейной формой, заданной формулой $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$, $u_1$, $v_1 \in V_1$, $u_2$, $v_2 \in V_2$.

**Определение 3**. Подпространства $L_1$, $L_2$ называются *ортогональными*, если для всех $u \in L_1$, $v \in L_2$ выполнено $(u, v) = 0$.

Если $L_1$ и $L_2$ не пересекаются, то их линейная оболочка изометрична ортогональной прямой сумме $L_1$ и $L_2$.

**Определение 4**. Ядро формы — ядро отображения $V \to V^*$. Форма называется *невырожденной*, если её ядро нулевое.

**Предложение 1** *Билинейная форма на конечномерном пространстве невырождена тогда и только тогда, когда отображение $V \to V^*$ обратимо.*

*Доказательство:* Следует из равенства размерностей $V$ и $V^*$.

**Лемма 1** *Всякое пространство с билинейной симметрической формой изометрично ортогональной прямой сумме ядра формы и пространства с невырожденной формой.*

*Доказательство:* Пусть $V_0$ — ядро формы. Тогда, дополняя базис в $V_0$ до базиса в $V$, получим $V \cong V_0 \oplus V'$. При этом ядро формы на $V'$ нулевое, и элементы $V_0$ ортогональны элементам $V'$.

**Лемма 2** *Пусть $V$ — пространство с невырожденной билинейной симметрической формой, $L \subset V$ — подпространство, ограничение формы на которое невырождено. Тогда $V$ изометрично ортогональной прямой сумме $L$ и $L^\perp$, где $L^\perp$ — подпространство векторов, ортогональных $L$.*

*Доказательство:* Отобразим ортогональную прямую сумму $L \oplus L^\perp$ в $V$, переводя пару векторов в их сумму. Докажем, что это отображение — изоморфизм. Во-первых, его ядро равно пересечению $L$ и $L^\perp$, что совпадает с ядром формы на $L$, значит, наше отображение является вложением.

Чтобы доказать, что отображение является и наложением, представим каждый вектор в виде суммы элементов $L$ и $L^\perp$. Пусть $v \in V$. Тогда $(v, *)$ можно рассматривать и как функционал на $L$. Заметим, что в силу невырожденности ограничения формы всякий фунционал на $L$ имеет вид $(u, *)$ для $u \in L$. Тогда $v - u \in L^\perp$, что нам и требовалось.

**Определение 5**. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным*, если для всех $u$, $v \in U$ выполнено $(u, v) = 0$.

**Определение 6**. Пространство называется *гиперболическим*, если оно изометрично $U \oplus U^*$ с формой $((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = \phi_2(v_1) + \phi_1(v_2)$.

Матрица Грама такой формы приводится к блочному виду $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

**Лемма 3** *Пусть $V$ — конечномерное пространство с невырожденной билинейной симметрической формой, $L \subset V$ — изотропное подпространство. Тогда найдётся изотропное подпространство $L' \subset V$, такое что подпространство $L + L'$ (линейная оболочка $L$ и $L'$) гиперболическое.*

*Доказательство:* Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис $L$. Так как отображение $V \to V^*$ — изоморфизм, найдутся $f_1, \ldots, f_m \in V'$, такие что $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$ (где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и ноль иначе). Пусть $(f_i, f_j) = b_{ij}$. Рассмотрим новые базисные элементы $f_i' = f_i - \frac{1}{2} \sum b_{ij} e_j$. Тогда по-прежнему $(f_i', e_j) = \delta_{ij}$, но теперь $(f_i', f_j') = 0$ для всех $i$, $j$. Теперь в качестве $L'$ возьмём линейную оболочку $f_1', \ldots, f_n'$.

**Определение 7**. Подпространство $W \subset V$ называется *анизотропным*, если оно не содержит ненулевых изотропных подпространств (это равносильно $(v, v) \neq 0$ для всех $v \in W$).

**Теорема 1 (Разложение Витта)** *Предположим* $\mathrm{char} F \neq 2$. *Пусть векторное пространство $V$ над $F$ наделено симметрической билинейной формой. Тогда $V$ разлагается в ортогональную прямую сумму подпространств $V_0$, $V_1$ и $V_2$, где $V_0$ — ядро формы, $V_1$ гиперболическое, а $V_2$ анизотропно.*

*Доказательство:* Выделим ядро ортогональным прямым слагаемым, $V = V_0 \oplus V'$. Пусть $U \subset V'$ — максимальное (по вложению) изотропное подпространство. Тогда по Лемме 3 найдётя подпростанство $U'$, такое что $U + U'$ — гиперболическое подпространство. Поскольку форма на $U + U'$ невырождена, разложим $V'$ в ортогональную прямую сумму $V_1 = U + U'$ и $V_2 = (U + U')^\perp$.

Заметим, что $V_2$ анизотропно, иначе обозначим за $v$ изотропный вектор в $V_2$, и заметим, что подпространство, порождённое $U$ и $v$, изотропно, что противоречит максимальности $U$.

**Теорема 2 (Теорема Витта)** *Пусть $V$ — векторное пространство с невырожденной билинейной симметрической формой. Также пусть $L_1$, $L_2 \subset V$ — подпространства, $f : L_1 \to L_2$ — изометрия. Тогда существует изометрия $\tilde{f} : V \to V$, переводящая $L_1$ в $L_2$.*

**Лемма 4** *Теорема Витта верна, если ограничение формы на $L_1$ (и, тем самым, $L_2$) невырождено.*

*Доказательство:* Докажем индукцией по размерности $L_1$.

**База** $\dim L_1 = 1$ состоит из трёх случаев.

1) $L_1 = L_2$, тогда по Лемме 2 пространство $V$ изометрично ортогональной прямой сумме $L_1$ и $L_1^\perp$. Положим $\tilde{f} = f$ на $L_1$ и $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на $L_1^\perp$, продолжим по линейности на $V$.

2) $L_1 \neq L_2$, форма на $L_1 + L_2$ невырождена. Пусть $L' = (L_1 + L_2)^\perp$, тогда по Лемме 2 пространство $V$ изометрично ортогональной прямой сумме $L_1 + L_2$ и $L'$. Пусть $e_1$ — базисный вектор $L_1$, тогда $e_2 = f(e)$ — базисный вектор $L_2$, причём $(e_1, e_1) = (e_2, e_2)$. Положим $\tilde{f}(e_1) = e_2$, $\tilde{f}(e_2) = e_1$ и $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на $L'$.

3) Форма на $L_1 + L_2$ вырождена. Тогда ядро этой формы $L_0$ одномерно, пусть его базис состоит из $e_0$. Пусть $e_1$ составляет базис $L_1$. Тогда, так как $(e_1, e_1) \neq 0$, а $f$ — изометрия, $f(e_1)$ равно или $e_1 + \lambda e_0$, или $-e_1 + \lambda e_0$, где $\lambda \in F$.

Применим Лемму 3 к пространству $L_1^\perp$ и подпространству $L_0$, пусть $e_2$ порождает $L_0'$. Тогда матрица Грама $L = L_1 + L_2 + L_0'$ в базисе $e_0, e_2, e_1$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e_1, e_1) \end{pmatrix}$, в частности, ограничение формы на $L$ невырождено. Полагая $\tilde{f} = \mathrm{Id}$ на ортогональном дополнении к $L$, остаётся определить $\tilde{f}$ на $L$. Для этого положим

$$\tilde{f}(e_0) = e_0, \qquad \tilde{f}(e_1) = f(e_1) = \pm e_1 + \lambda e_0, \qquad \tilde{f}(e_2) = e_2 \mp \frac{\lambda}{(e_1, e_1)} e_1.$$

**Шаг.** Пусть $e$ — элемент $L$, такой что $(e, e) \neq 0$. Тогда по доказанному выше существует изометрия $f' : V \to V$, переводящая $e$ в $f(e)$. Будем искать изометрию $\tilde{f}$ в виде $gf'$, полагая $g(f(e)) = f(e)$. Требуется, чтобы $g$ было изометрией и переводило $f(L_1)$ в $L_2$.

Пусть $V' = f(e)^\perp \subset V$. Определим $g$ на $V'$ по предположению индукции как изометрию, переводящую $f(L_1) \cap V'$ в $L_2 \cap V'$. Продолжая по линейности на всё $V$, получим требуемое отображение.

Теперь докажем теорему в полной общности. Дополним $L_1$ и $L_2$ до пространства с невырожденной формой следующим образом: по Лемме 1 представим $L_i$, $i = 1, 2$, в виде ортогональной прямой суммы ядра $L_i^0$ и $L_i'$, затем применим Лемму 3 к пространству $L_i'^{\perp}$ и изотропному подпространству $L_i^0$. Получим в результате изотропные подпространства $M_i$, причём ограничение формы на $L_i^0 + L_i' + M_i$ имеет матрицу Грама следующего блочного вида: $\begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_i \end{pmatrix}$, где $G_i$ — матрица Грама формы на $L_i'$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис $L_1^0$, за $e^1, \ldots, e^n$ обозначим двойственный базис $M_i$, в котором $(e_i, e^j) = \delta_{ij}$. Так как $f$ — изометрия, $f$ переводит $L_1^0$ в $L_2^0$, и $f(e_1), \ldots f(e_n)$ — базис $L_2^0$. Пусть $f^1, \ldots f^n$ —двойственный ему базис $M_2$. Тогда изометрию $f$ можно продолжить с $L_1$ до $L_1 + M_1$, отображая $e^i$ в $f^i$.

**Следствие 1** *Разложение Витта единственно с точностью до изометрии слагаемых.*

*Доказательство:* Во-первых, ядро определено однозначно своей размерностью, также как и форма на другом слагаемом разложения Леммы 1 (оно изометрично факторпространству с естественной формой на нём). Значит, утверждение сводится к невырожденной форме.

Во-вторых, гиперболическое пространство также однозначно задаётся с точностью до изометрии своей размерностью. Докажем, что максимальные изотропные подпространства имеют одинаковые размерности. Пусть $U_1$ и $U_2$ — максимальные изотропные и $\dim U_1 > \dim U_2$. Тогда рассмотрим произвольное подпространство $U \subset U_1$, такое что $\dim U = \dim U_2$. Тогда $U$ изометрично $U_2$ и по Теореме Витта эту изометрию можно продолжить до изометрии всего пространства. Но изометрия должна сохранять свойство быть максимальным изотропным, которое присуще $U_2$, но не $U$.

Теперь пусть имеются два разложения Витта пространства с невырожденной формой. Видно, что изотропные подпространства в гиперболических слагаемых максимальны. Значит, ограничение формы на гиперболическое подпространство разложения совпадёт, и, тем самым, задаст изометрию соответствующих подпространств. Продолжим эту изометрию на всё пространство и заметим, что она переводит ортогональное дополнение в ортогональное дополнение, то есть задаёт требуемую изометрию анизотропных подпространств.