Независимый Московский Университет
ПРОГРАММА
курса математического анализа
2-й курс 3-семестр 2010 уч. года
М. Э. Казарян

1. **Кривые в $\mathbb{R}^n$.** ***Интеграл по кривой. Замена переменных в интеграле. Поведение интеграла при замене пути интегрирования.***

2. **Многообразия.** ***Подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Абстрактные многообразия. Локальные координаты. Атласы и карты. Функции перехода. Гладкие отображения многообразий.***

3. **Касательный вектор.** ***Вектор как скорость движения по кривой. Координаты вектора и их преобразование при заменах. Производная функции по направлению. Дифференцирование кольца функций. Касательная плоскость к многообразию в точке. Производная отображения. Цепное правило.***

4. **Векторные поля.** ***Фазовая кривая и фазовый поток. Поля и обыкновенные дифференциальные уравнения. Выпрямление векторного поля. Коммутатор векторных полей и коммутирование фазовых потоков. Теорема Фробениуса об интегрируемых распределениях.***

5. **Дифференциальные формы на многообразиях.** ***Дифференциал функции. Внешнее произведение дифференциальных форм. Форма объема, форма площади и форма Гельфанда-Лере. Внешний дифференциал формы. Преобразование форм при отображениях.***

6. **Интегрирование дифференциальных форм.** ***Ориентация. Инвариантность интеграла при диффеоморфизме. Многообразия с краем. Формула Стокса.***

7. **Производная Ли.** ***Коммутатор векторных полей как производная Ли. Тождество Картана***

8. **Лемма Пуанкаре.** ***Когомологии де Рама***

9. **Дифференциальные формы в векторном анализе и математической физике.** ***Формы в $\mathbb{R}^3$ и инвариантный смысл градиента, ротора, дивергенции, потока векторного поля, циркуляции. Формы в $\mathbb{R}^4$ и уравнения Максвелла.***

10. **Гармонические функции.** ***Теорема о среднем. Принцип максимума***

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 6 сентября 2010 года

Листок I

1. **Определение.** *Дифференциальной* 1-*формой* называется семейство гладко зависящих от точки пространства линейных форм на касательных векторах.

   Пусть $dx^1, \ldots, dx^n$ — базис, двойственный базису $\partial/\partial x'^1, \ldots, \partial/\partial x'^n$. Любая 1-форма однозначно записывается в виде $\omega = \sum \omega_i(x) dx^i$, где ω_i — гладкие функции.

   Пример. Пусть F — функция. Дифференциал dF — это форма $dF = \sum \dfrac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$. Значение формы dF на касательном векторе, представленном кривой γ, равно производной F вдоль γ.

2. Любая ли 1-форма является дифференциалом? Сформулируйте необходимое условие.

3. Как преобразуются координаты ω_i 1-форм при гладких заменах координат?

   Определение криволинейного интеграла 1-формы ω по кривой γ, параметризованной $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \sum \omega_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} dt = \int\limits_a^b (\omega, \dot\gamma) dt$$

   (здесь $(\omega, \dot\gamma)$ — это значение формы ω на касательном векторе $\dot\gamma$ кривой).

4. Докажите, что криволинейный интеграл

   а) инвариантен относительно замен координат в $\mathbb{R}^n$;

   б) инвариантен относительно замены параметризации кривой;

   в) $\int_\gamma \omega = -\int_{\overline{\gamma}} \omega$, где $\overline{\gamma}$ — та же кривая, но пройденная в противоположном направлении;

   г) формула «Стокса-Ньютона-Лейбница»: $\int_\gamma dF = F(B) - F(A)$, где γ — произвольная кривая, соединяющая A и B.

5. Вычислите интеграл $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$, где кривая γ соединяет точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$

   а) по отрезку;

   б) по дуге параболы $y = 2x^2$;

   в) по ломаной $(0, 0)$—$(1, 0)$—$(1, 2)$.

6. Те же вопросы для интеграла $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$.

7. Вычислите $\int xy^2\,dy - x^2 y\,dx$ по дуге окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

8. Вычислите $\int (x - y)\,dx - (x + y)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Вычислите $\int x^2\,dx + y^3\,dy + \cos z\,dz$ по кривой $\gamma :\ x = t^2 + t^3;\ y = \sqrt{t^2 + 1};\ z = e^{t^2};\ -1 \leqslant t \leqslant 1$.

10. Вычислите $\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ по замкнутому контуру, не проходящему через начало координат. (Указание: перепишите подинтегральную форму в полярных координатах.)

11. Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задана 1-форма $\omega = \sum \omega_i dx^i$. Установите, равносильны ли следующие утверждения:

   а) $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути, соединяющего две данные точки A и B.

   б) $\oint \omega = 0$ по любому замкнутому контуру.

   в) $\omega = dF$ для некоторой функции $F : U \to \mathbb{R}$.

   г) Форма ω замкнута (1-форма ω называется *замкнутой*, если $\dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$ для всех i, j).

   (Ответ: а)⇔б)⇔в)⇒г).)

12. Докажите **Теорему**: *всякая замкнутая* 1-*форма, заданная в шаре, является дифференциалом некоторой функции.*

   (Решение для случая $n = 2$. Пусть $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Положим $F(x, y) = \int \omega$, где интеграл берется по прямолинейному отрезку (tx, ty), $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \qquad F(x) = \int_0^1 (xP(tx, ty) + yQ(tx, ty))dt;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^1 \left(tx \frac{\partial P}{\partial x} + P(tx, ty) + ty \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dt = \int_0^1 \left(tx \frac{\partial P}{\partial x} + P(tx, ty) + ty \frac{\partial P}{\partial y} \right) dt = \int_0^1 \frac{d(tP(tx, ty))}{dt} dt = P(x, y).$$

   Обоснуйте самостоятельно формулу дифференцирования интеграла Римана по параметру.)

   Определение. Пространство M называется *односвязным*, если всякое непрерывное отображение окружности $S^1 \to M$ продолжается до непрерывного отображения диска $D^2 \to M$, $S^1 = \partial D$ (иными словами, если каждую замкнутую петлю в M можно непрерывно «стянуть» в точку).

13. Докажите, что всякая замкнутая 1-форма, заданная в односвязной области, является дифференциалом некоторой функции.

14. Вычислите $\int (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

15. Вычислите $\int e^{-(x^2 - y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

16. Дайте обоснованное определение работы силы вдоль пути.

17. Найдите работу силы величины $F = kr$, направленной вдоль радиус-вектора по направлению к началу координат, вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

18. Найдите работу силы Ньютона $F = k/r^2$ вдоль произвольного пути, соединяющего две точки в $\mathbb{R}^3$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 13 сентября 2010 года

Листок II

Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким (под)многообразием* размерности m, если для каждой точки $x^* \in M$ существует ее окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $M \cap U$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

у которой ранг матрицы частных производных $\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)\right\}$ максимален.

1. Докажите эквивалентность каждого из следующих определений подмногообразия приведенному выше: $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, если для всякого $x^* \in M$ существует окрестность U такая, что

   а) $M \cap U$ является взаимно однозначным образом при гладком отображении максимального ранга $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где $V \subset \mathbb{R}^m$ — некоторая область. Такое отображение φ вместе с областями $V \subset \mathbb{R}^m$ и $U \cap M \subset M$ называется *картой*, а произвольная совокупность карт, покрывающих M — *атласом*;

   б) $M \cap U$ однозначно проектируется на одну из m-мерных координатных плоскостей, а оставшиеся $n-m$ координат выражаются через данные как гладкие функции;

   в) существует (криволинейная) система координат в U, в которой $M \cap U$ есть координатная m-мерная плоскость $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$;

   г) $M \cap U$ задается системой уравнений $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$, такой, что ранг матрицы частных производных $\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right\}$ равен ровно $n-m$ в каждой точке $x \in U$ (количество уравнений, вообще говоря, может даже быть бесконечным).

В последующих задачах определите, при каких условиях данные множества являются многообразиями, найдите размерность, определите карты и локальные координаты.

2. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$; сфера $\sum x_i^2 = R^2$.

3. Поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = a$.

4. Множество $\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x + y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

5. Образ отрезка $[a, b]$ при отображении $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

6. Подмножество $\mathrm{SL}(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ квадратных матриц, состоящее из матриц с единичным определителем.

7. Множество $\mathrm{O}(n)$ ортогональных матриц.

8. Многообразие Штифеля $M_{n,k}$ состоящее из ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 20 сентября 2010 года

Листок III

Касательный вектор к многообразию M в точке $x \in M$ задается, как и для областей евклидова пространства, как класс эквивалентных кривых, выходящих из точки x. Множество касательных векторов образует *касательное пространство* T_xM.

1. Докажите, что T_xM — векторное пространство. Какова его размерность? Докажите, что для всяких локальных координат $x_1, \dots x_n$ векторы $\partial/\partial x_i$ (касательные к i-й координатной прямой) образуют базис в T_xM.

   Пусть на M задана некоторая функция $f : M \to \mathbb{R}$. *Производной* ξf *вдоль вектора* $\xi \in T_xM$, касательного к кривой γ, выходящей из точки x, называется производная в нуле ограничения f на γ (рассматриваемого как функция одной переменной). В координатах, если $\xi = \sum \xi_i \partial/\partial x_i$, то $\xi f = \sum \xi_i \, \partial f/\partial x_i$.

   Векторным полем v на M называется гладкое соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ касательный вектор $v(x) \in T_xM$ в этой точке. В локальных координатах каждое векторное поле однозначно записывается в виде $v = \sum v_i(x)\partial/\partial x_i$.

   Производная функции вдоль векторного поля вновь является функцией, заданной на всем многообразии. Эта операция линейна и удовлетворяет *правилу Лейбница*: $v(fg) = vf\,g + f\,vg$. Всякая такая операция (т.е. линейная и удовлетворяющая правилу Лейбница) называется *дифференцированием.*

2. Докажите, что обратно, каждое дифференцирование задается производной вдоль некоторого поля.

3. Докажите, что коммутатор $[u, v] = uv - vu$ двух дифференцирований тоже является дифференцированием (в то время, как просто композиции uv и vu дифференцированиями не являются).

   Векторное поле, производная вдоль которого равна коммутатору производных вдоль полей u и v, называется коммутатором полей u и v.

4. Найдите координатное выражение для коммутатора полей $u = \sum u_i\partial/\partial x_i$ и $v = \sum v_i\partial/\partial x_i$. (Ответ: $[u, v] = \sum \left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.)

5. Докажите, что операция коммутирования векторных полей линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ (говорят, что векторные поля образуют алгебру Ли).

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 27 сентября 2010 года

Листок IV

Внешней k-формой называется полилинейная кососимметрическая форма от k касательных векторов. *Дифференциальной k-формой* называется семейство внешних k-форм, гладко зависящих от точки многообразия. Пространство дифференциальных k-форм на многообразии M обозначается через $\Omega^k(M)$. По определению, $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$ — пространство гладких функций. *Внешним умножением* $\alpha^k \wedge \beta^l$ k-формы α^k и l-формы β^l называется $k+l$-форма

$$\alpha^k \wedge \beta^l(\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}) = \sum_{\substack{\sigma_1 < \cdots < \sigma_k \\ \sigma_{k+1} < \cdots < \sigma_{k+l}}} (-1)^\sigma \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_k})\, \beta^l(\xi_{\sigma_{k+1}}, \ldots, \xi_{\sigma_{k+l}})\ ,$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $(1, \ldots, k+l) \mapsto (\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+l})$.

1. Докажите, что внешнее умножение ассоциативно и (супер)коммутативно,

$$\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k.$$

2. Для данных 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и векторов $v_1, \ldots, v_k$ вычислите $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k(v_1, \ldots, v_k)$.

3. Найдите размерность пространства Ω^k_x внешних k-форм в точке $x \in M$.

   Пусть задано гладкое отображение $F : M^m \to N^n$. *Касательное отображение* $F_* = DF : T_xM \to T_{F(x)}N$ переводит векторы на M в векторы на N. Однако на векторных полях отображение DF не определено, поскольку F, вообще говоря, не взаимно однозначно. Тем не менее на формах операция взятия *обратного образа*, $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, действующая по правилу $F^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(F_*v_1, \ldots, F_*v_k)$ корректно определена.

4. Докажите, что взятие обратного образа перестановочно с внешним умножением, $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$.

5. Покажите, что $\omega^1 \wedge \omega^1 = 0$. Верно ли, что $\omega^2 \wedge \omega^2 = 0$? Приведите пример ω^2, для которой $\omega^2 \wedge \omega^2 \neq 0$.

6. Найдите ω^2, для которой $(x\,dx + y\,dy + z\,dz) \wedge \omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$. Докажите, что при ограничении на единичную сферу ω превращается в форму площади.

7. Пусть $f = x_1^{a_1} + \cdots + x_n^{a_n}$ Найдите ω, для которой $df \wedge \omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

8. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — линейно независимые 1-формы, и $\alpha \neq 0$ — еще одна 1-форма, такая, что $\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0$. Докажите, что

   а) α есть линейная комбинация форм α_i.

   б) Существует некоторая форма β, для которой $\alpha \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$.

9. Пусть $\alpha \neq 0$ — некоторая 1-форма. Докажите, что $\alpha \wedge \omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega = \alpha \wedge \beta$ для некоторого β.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 4 октября 2010 года

Листок V

n-форма ω в $\mathbb{R}^n$ называется *финитной*, если ее носитель ограничен. Если носитель формы $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ лежит в кубе $I^n = \{0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$, то по определению, ее интеграл — это кратный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x)\, dx_1 \ldots dx_n \ .$$

Для определения интеграла n-формы по произвольному многообразию нужно предполагать, что многообразие а) компактно, и б) ориентировано.

Определение. На многообразии M задана *ориентация*, если на нем зафиксирована нигде не обращающаяся в ноль n-форма. Если M связно, и ω_1, ω_2 — две такие формы, то $\omega_2 = f\omega_1$, где $f \neq 0$. Значит либо $f > 0$ (согласованные ориентации), либо $f < 0$ (противоположные ориентации). Базис $v_1, \ldots, v_n \in T_xM$ в касательном пространстве называется *положительным* (соотв. *отрицательным*), если $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ (соотв. < 0). Задать ориентацию — дать способ согласованного задания знака базисов во всех касательных пространствах T_xM, $x \in M$.

Пусть $\omega_1 \in \Omega^n(M)$ и пусть носитель ω_1 целиком помещается в некоторой карте $F : U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем положить

$$\int_M \omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F^*\omega_1 \ ,$$

где форма $F^*\omega_1 \in \Omega^n(U)$ продолжена нулем вне $U \subset \mathbb{R}^n$. Этот интеграл не зависит от карты, если только координатные отображения сохраняют ориентацию (действительно, при заменах координат подинтегральное выражение в кратном интеграле умножается на модуль якобиана замены, так же как и форма $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, поэтому интеграл финитной формы определен инвариантно).

Значит, чтобы определить интеграл $\int_M \omega$ в общем случае, достаточно представить ω в виде $\omega = \sum \omega_i$, где носитель каждой формы ω_i содержится в какой-нибудь карте, а затем воспользоваться аддитивностью интеграла, положив $\int_M \omega = \int_M \sum \omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum \int_M \omega_i$. Это можно сделать при помощи разбиения единицы.

Разбиение единицы — это конечный набор бесконечно гладких функций $f_i : M \to \mathbb{R}$ таких, что 1) носитель каждой функции содержится в какой-нибудь карте, 2) $\sum f_i \equiv 1$. Если $\{f_i\}$ — разбиение единицы, то $\omega = \sum f_i\omega$ — искомое представление.

Построение разбиения единицы. Пусть $x \in M$. Выберем какую-нибудь карту, содержащую x, возьмем функцию «шапочку» ρ_x в этой карте, и продолжим ее вне карты нулем. Тогда носитель ρ_x сосредоточен в карте, и в некоторой окрестности V_x точки x функция ρ_x строго положительна. Выберем из покрытия $\{V_x\}$ конечное подпокрытие $\{V_{x_i}\}$, тогда $f_i = \rho_{x_i} / \sum \rho_{x_i}$ — разбиение единицы.

2. Вычислите интеграл по эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ от формы

   а) $dx \wedge dy$;

   б) $z\, dx \wedge dy$;

   в) $z^2 dx \wedge dy$;

   г) $\dfrac{dy \wedge dz}{x} + \dfrac{dz \wedge dx}{y} + \dfrac{dx \wedge dy}{z}$.

3. Вычислите интеграл по верхней половине ($z \geqslant 0$) того же эллипсоида от формы

   а) $x^3 dy \wedge dz$; б) $yz\, dz \wedge dx$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана n-форма объема ω (например $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$) и поверхность M, заданная уравнением $F = 0$, где F — гладкая функция. *Формой Гельфанда-Лере* называется такая $(n-1)$-форма η, что $df \wedge \eta = \omega$. Форма Гельфанда-Лере обозначается символом $\frac{\omega}{dF}$.

4. Покажите, что форму η можно выбирать по разному, однако ее ограничение на поверхность M не зависит от произвола в выборе формы η.

5. Докажите, что форма площади σ на гиперповерхности $F = 0$ в $\mathbb{R}^n$ связана с формой Гельфанда-Лере соотношением
$$\sigma = dF(\nu)\, \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{dF},$$
где ν — единичный нормальный вектор поверхности, т.е. $dF(\nu)$ — длина (евклидова) градиента функции F.

6. Приведите геометрическое определение потока поля (A, B, C) через поверхность в трехмерном пространстве. Покажите, что поток поля есть не что иное, как интеграл от 2-формы $A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 12 октября 2010 года

Листок VI

Дифференциал $d\omega$ дифференциальной k-формы ω — это дифференциальная $(k+1)$-форма, значение которой на наборе попарно коммутирующих векторных полей (например, базисных $\partial/\partial x_i$), определяется формулой

$$d\omega(v_0, \ldots, v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i \omega(v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k);$$

на произвольные наборы векторов $d\omega$ продолжается по линейности.

1. Найдите выражение для $d\omega$ на произвольном наборе векторных полей. (Ответ:

$$d\omega(v_0, ..., v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i \omega(v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_k) + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, ..., \hat{v}_i, ..., \hat{v}_j, ..., v_k)\ .)$$

Последнее выражение для $d\omega$ позволяет проверить корректность определения дифференциала.

2. Вычислите $d^2 f$, где f — функция и $d^2\omega$, где ω — 1-форма.

3. Докажите следующие свойства дифференциала.

   (а) Линейность.

   (б) Если $f \in \Omega^0 = \mathcal{F}$, то df совпадает с обычным дифференциалом функций.

   (в) $dd = 0$.

   (г) $d(\alpha^k \wedge \beta^l) = (d\alpha^k) \wedge \beta^l + (-1)^k \alpha^k \wedge (d\beta^l)$.

Приведенные свойства полностью определяют дифференциал, и могут рассматриваться как независимое его определение. Именно этими свойствами и пользуются при вычислениях.

4. Найдите выражение для дифференциала в координатах. (Ответ:

$$d(\sum_{i_1,\ldots,i_k} a_I(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} da_I \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{l; i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial a_I}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .)$$

Наше определение дифференциала бескоординатное, так что по определению, дифференциал не меняется при заменах координат. Это замечание можно обобщить.

5. Докажите, что взятия дифференциала перестановочно с взятием обратного образа при отображениях, то есть если $F : M^m \to N^n$ — гладкое отображение многообразий, и $\omega \in \Omega^k(N)$, то $dF^*\omega = F^* d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\eta$ для некоторой формы η. Точные формы замкнуты ($d^2 = 0$); обратное, вообще говоря, неверно (приведите пример).

6. Вычислите 2-форму $p^*\sigma$, где $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ — центральная проекция на единичную сферу, а σ — форма площади на сфере. Замкнута ли полученная форма? Точна ли она?

7. Для какого α_n форма $\frac{1}{r^{\alpha_n}}\omega$ замкнута, где $r = \sqrt{\sum x_i^2}$, а $\omega = \sum(-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

8. Найдите функцию f, для которой $d(f\omega) = 0$, где $\omega = \frac{dx}{yz} + \frac{dy}{xz} + \frac{dz}{xy}$.

Производная функции вдоль направления не обобщается на дифференциальные формы, поскольку нельзя сравнивать значения формы в различных точках. Оказывается, можно определить *производную $L_\xi\omega$ формы ω вдоль векторного поля ξ*. Пусть $G_t : M \to M$, $|t| < \varepsilon$, $G_0 = \mathrm{id}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов. Оно задает семейство векторных полей $\xi(t)$, значение поля $\xi(t_0)$ в точке $G_{t_0}x \in M$ — касательный вектор к кривой $\{G_t x\}$. Обратно, каждому векторному полю (возможно, зависящему от t) соответствует семейство диффеоморфизмов (это — теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, верная для компактных, а с некоторыми оговорками, и для произвольных многообразий). Положим $\xi = \xi(0)$. Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$. Положим $\omega_t = G_t^*\omega$.

Определение. $L_\xi\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_t^*\omega$.

9. Докажите следующие свойства производной L_ξ вдоль векторного поля.
   а) Линейность.
   б) Если $f \in \Omega^0 = \mathcal{F}$, то $L_\xi f = \xi f = df(\xi)$ — обычная производная вдоль векторного поля.
   в) Для произвольных двух форм $L_\xi(\alpha \wedge \beta) = (L_\xi\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_\xi\beta)$.

10. Докажите, что если η — другое векторное поле, то $L_\xi\eta = [\xi, \eta]$ (по определению, $L_\xi\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (G_t^{-1})_*\eta$).

11. Докажите правило дифференцирования «сложной функции»: если $\omega \in \Omega^k(M)$ и $v_1, \ldots, v_k$ — векторные поля на M, то
$$L_\xi\Big(\omega(v_1, \ldots, v_k)\Big) = (L_\xi\omega)(v_1, \ldots, v_k) + \sum \omega(v_1, \ldots, [\xi, v_i], \ldots, v_k).$$

12. Докажите, что *оператор подстановки* $i_\xi\omega^k(v_1, \ldots, v_{k-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \omega^k(\xi, v_1, \ldots, v_{k-1})$ обладает следующими свойствами
   а) Линейность.
   б) $i_\xi df = \xi f$, если f — функция.
   в) $i_\xi(\alpha^k \wedge \beta^l) = (i_\xi\alpha^k) \wedge \beta^l + (-1)^k \alpha^k \wedge (i_\xi\beta^l)$.

Операторы $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$, $i_\xi : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$ и $L_\xi : \Omega^k \to \Omega^k$ связаны *тождеством Картана*
$$L_\xi = i_\xi d + d i_\xi\ .$$
Обнаружить это замечательное тождество гораздо труднее, чем доказать

13. Докажите тождество Картана для
   (а) функций;
   (б) 1-форм вида df;
   (в) произвольных форм. (Указание: воспользуйтесь индукцией по степени ω.)

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 25 октября 2010 года

Листок VII

Имеются два определения *многообразия с краем.* 1) $(M, \partial M)$ — подмножество в $\mathbb{R}^N$, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо n-мерному шару, либо полушарию. Край ∂M — множество точек, не имеющих окрестности первого типа. 2) $(M_1, \partial M_1)$ — это пара (M, N), состоящая из n-мерного многообразия M и его $(n-1)$-мерного подмногообразия N, разбивающего M на две связные компоненты M_1 и M_2, из которых одна выделена. Обратим внимание на некоторую двусмысленность традиционной терминологии: многообразие с краем многообразием не является (если только край непуст).

Ориентация многообразия задает *индуцированную* ориентацию на его краю: пусть $x \in \partial M$, и $v_1, \dots v_n \in T_x M$ — положительный репер для M, причем $v_2, \dots, v_n \in T_x \partial M$, а v_1 направлен «наружу», тогда $v_2, \dots, v_n$ — положительный репер для ∂M. В терминах форм старшей степени: если в локальных координатах край задается уравнением $x_1 = 0$, а самому многообразию соответствует область $x_1 < 0$ (так что вектор $\partial/\partial x_1$ направлен наружу), то форма $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ориентирует M тогда и только тогда, когда форма $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ориентирует край ∂M.

Теорема (формула Стокса). *Пусть M — компактное многообразие с краем ∂M, и ω — $(n-1)$-форма на M. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega \ .$$

Проверим теорему в квадрате I^2 (невзирая на то, что квадрат многообразием с краем не является). Пусть $\omega = f(x,y)dy$. Тогда $d\omega = \partial f/\partial x\, dx \wedge dy$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_{I^2} d\omega = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dx\Big) dy = \int_0^1 (f(1,y) - f(0,y))dy \ .$$

С другой стороны, форма ω нетривиальна только на сторонах $x = 0$ и $x = 1$ квадрата, поэтому (после учета соответствующих ориентаций)

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_0^1 f(1,y)dy - \int_0^1 f(0,y)dy \ .$$

Те же вычисления проверяют формулу Стокса в произвольном кубе I^n, нужно только y заменить всюду на $y_2, \dots, y_n$, а dy — на $dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$.

В действительности, вычисления для куба дают формулу Стокса в общем случае. Действительно, из аддитивности интеграла следует, что нам достаточно доказать формулу Стокса при условии, что носитель формы ω содержится в образе куба I^n при отображении $F : U \to M$, $I^n \subset U \subset \mathbb{R}^n$, задающем некоторые локальные координаты. Положим $\Omega = F^*\omega$. Тогда $F^* d\omega = d\Omega$.

Рассмотрим два случая: 1) $F(I^n) \cap \partial M = \emptyset$. В этом случае $\int_{\partial M} \omega = 0$, поскольку $\omega = 0$ на ∂M. С другой стороны, по формуле Стокса для куба

$$\int_M d\omega = \int_{I^n} d\Omega = \int_{\partial I^n} \Omega = 0 \ ,$$

поскольку $\omega = 0$ на образе $F(\partial I^n)$ границы куба.

2) $F(I^n) \cap \partial M$ совпадает с гранью $I^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ куба. Тогда $\int_{\partial M} \omega = -\int_{I^{n-1}} \Omega$ (вспомним правило ориентации границы!) С другой стороны, Ω обращается в ноль на всех гранях, кроме I^{n-1}, и опять по формуле Стокса для куба, получаем

$$\int_M d\omega = \int_{I^n} d\Omega = \int_{\partial I^n} \Omega = -\int_{I^{n-1}} \Omega\,.$$

Теорема полностью доказана.

1. Проверьте формулу Стокса для
   а) $\omega = x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$ на верхней полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;
   б) $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz$ на круге в пересечении шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ с плоскостью $x + z = a$;
   в) $\omega = (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$ на винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$ $(a \leqslant u \leqslant b,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$.
2. Вычислите поток поля $v = \frac{\vec{r}}{r^3}$ через граничную поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. Если M^n — компактное многообразие без края, то для всякой точной n-формы Ω выполняется $\int_M \Omega = 0$. Верно ли обратное, $\int_M \Omega = 0 \Rightarrow \Omega = d\omega$ для некоторой $(n-1)$-формы ω?
4. а) Выведите формулу для объема тела, ограниченного поверхностью $r = r(\varphi, \theta)$ и угловым сектором $a_1 \leqslant \varphi \leqslant b_1$; $a_2 \leqslant \theta \leqslant b_2$.
   б) Вычислите объем тела для $r = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 1 ноября 2010 года

Листок VIII

Лемма Пуанкаре. *Всякая замкнутая k-форма в $\mathbb{R}^n$ при $k > 0$ является точной.*

Эквивалентная формулировка: всякая замкнутая форма ω на произвольном многообразии M является *локально* точной, то есть для каждой точки $x \in M$ найдется такая форма η, что $\omega = d\eta$ в некоторой окрестности точки x.

Доказательство обобщает соответствующее доказательство для случая 1-форм, данное в листке 1. Рассмотрим отображение $h : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$(h\omega)_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int\limits_0^1 \omega_{tx}(\sum x_i \tfrac{\partial}{\partial x_i}, tv_1, \dots, tv_{k-1})\, dt\ .$$

Тогда на $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ при $k > 0$ выполняется

$$hd + dh = \mathrm{id},$$

то есть для всякой формы ω (не обязательно замкнутой) $h(d\omega) + dh(\omega) = \omega$. Из этого равенства лемма Пуанкаре мгновенно вытекает. Проверка равенства оставляется в качестве задачи.

1. Пусть $\omega = A\, dx \wedge dy + B\, dy \wedge dz + C\, dz \wedge dx$, где A, B, C — функции ($n = 3$). Вычислите $h(\omega)$.
2. Вычислите $hd + dh$ на
   а) 0-формах (функциях);
   б) точных 1-формах в $\mathbb{R}^n$;
   в) произвольных 1-формах в $\mathbb{R}^3$;
3. Пусть $\omega = c(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Докажите, что $h(\omega) = a(x) \sum (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$. Чему равно $a(x)$?
4. Докажите равенство $hd + dh = \mathrm{id}$ на $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k > 0$.
5. Определите $h(\omega)$ для $\frac{1}{r^3}(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy)$.
6. Найдите линейные преобразования в $\mathbb{R}^3$, сохраняющие форму $dx_1 \wedge dx_2$.

Пространством k-мерных когомологий де Рама $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ называется факторпространство пространства замкнутых k-форм по точным.

Лемма Пуанкаре утверждает, что $H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k > 0$. В действительности, когомологии де Рама являются топологическим (и даже гомотопическим) инвариантом многообразия. Если многообразие компактно, то все пространства когомологий де Рама конечномерны.

7. Вычислите следующие пространства когомологий:
   а) $H^0_{\mathrm{DR}}(M)$ для произвольного многообразия;

б) $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ при $k > \dim M$;

в) $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1)$;

г) $H^1_{\mathrm{DR}}(S^2)$;

д) $H^1_{\mathrm{DR}}(M)$ для односвязного многообразия;

е) $H^2_{\mathrm{DR}}(S^1 \times S^1)$;

ж) $H^2_{\mathrm{DR}}(S^2)$.

8. Опишите замкнутые и точные формы

   а) на окружности;

   б) в комплексе $e^{-x^2/2}(P,\ Q\,dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;

   в) в комплексе $e^{-x^3-x}(P,\ Q\,dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;

   г) в комплексе $e^{-(x^2+y^2)}(P,\ U\,dx{+}V\,dy\ , Q\,dx \wedge dy)$, где $P(x,y), \ldots, Q(x,y)$ — многочлены.

Комментарии к доказательству леммы Пуанкаре. Геометрический смысл приведенного доказательства является применение тождества Картана.

Пусть $G_t : M^m \to N^n$, $t \in [0,1]$ — гладкое семейство отображений, не обязательно диффеоморфизмов. Оно задает семейство векторов $\xi_x(t) \in T_{G_t(x)}N$, $x \in M$ — касательных к кривым $\{G_t x\}$, $t \in [0,1]$. Пусть $\omega \in \Omega^k(N)$. Положим $\alpha_t = G_t^*\omega \in \Omega^k(M)$. Тогда аналогично, индукцией по степени ω, доказывается следующее усиление тождества Картана

$$\frac{d}{dt}\alpha_t = \theta_t\, d + d\,\theta_t, \quad t \in [0,1],$$

где $\theta_t : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ — «подстановка $\xi(t)$ одновременно со взятием обратного образа», $(\theta_t\omega)_x(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(\xi_x(t), (G_t)_* v_1, \ldots, (G_t)_* v_{k-1})$. Интегрируя по t, получаем равенство

$$\alpha_1 - \alpha_0 = hd\omega + dh\omega,$$

где $h : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$, $\omega \mapsto \int_0^1 \theta_t dt$. Из этого равенства вытекает **принцип гомотопии**: *обратные образы замкнутой формы при гладко гомотопных отображениях отличаются на точную.* (Два гладких отображения многообразий называются гладко гомотопными, если их можно соединить гладким семейством отображений, зависящим от параметра $t \in [0,1]$.) Например, для гомотопии $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto tx$ получаем лемму Пуанкаре: в $\mathbb{R}^n$ всякая замкнутая форма положительной степени отличается от нулевой на точную.

9. Покажите, что оператор h для гомотопии $x \mapsto tx$ совпадает с одноименным оператором из доказательства леммы Пуанкаре, приведенного выше.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 8 ноября 2010 года

Листок IX

В классическом векторном анализе в трехмерном пространстве функция $f(x,y,z)$ может обозначать как собственно функцию, так и 3-форму $f\,dx\wedge dy\wedge dz$. Аналогично, вектор-столбец $(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ может обозначать не только векторное поле $P\partial/\partial x+Q\partial/\partial y+R\partial/\partial z$, но и 1-форму $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, или 2-форму $P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$, что очень сильно запутывает существо происходящего. В этих обозначениях дифференциалы в комплексе

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^1(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^2(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

называются, соответственно, *градиентом, ротором и дивергенцией.*

1. Найдите координатное выражение для этих операций.

Опишем инвариантно (насколько это возможно) эти соответствия, т.е. выясним, от каких дополнительных структур они зависят. Примерами возможных структур являются *форма объема* — невырожденная дифференциальная форма dV старшей степени (например, $dV=dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ в $\mathbb{R}^n$) и *риманова структура* — гладко зависящее от точки многообразия скалярное произведение в касательных пространствах (например, $\|v\|^2=\sum v_i^2$ в $\mathbb{R}^n$).

Пусть на многообразии M^n задана форма объема $dV=\omega^n$. Она задает взаимно-однозначное соответствие между функциями и n-формами, $f\mapsto f\omega$, что позволяет интегрировать по областям $D\subset M$ функции, $f\mapsto\int_D f\,dV$. При этом $m(D)=\int_D dV$ — «объем» области D.

Кроме того, имеется соответствие между векторными полями и $(n-1)$-формами, $v\mapsto\omega_v^{n-1}=\omega(v,\cdot)$. При этом n-форма $d\omega_v=L_v\omega$ пропорциональна ω, коэффициент пропорциональности называется *дивиргенцией* векторного поля v. Из определения вытекает, что дивиргенция

$$\operatorname{div}v(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\int_{D_\varepsilon}L_v\omega}{m(D_\varepsilon)}\ ,$$

измеряет скорость увеличения объема частиц в потоке поля v.

Интеграл по $n-1$-мерной поверхности G^{n-1} от формы ω_v называется *потоком* поля v через поверхность G. Если на M задана дополнительно риманова структура (скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$), то на поверхности G индуцируется естественная форма объема $dS=\omega^n(\nu,\cdot)$, где ν — вектор внешней единичной нормали к поверхности G. Тогда $v=(v,\nu)\nu+v_{\text{кас}}$, где вектор $v_{\text{кас}}$ касается G. Поэтому $\omega_v\Big|_G=(v,\nu)\,dS$, и поток имеет вид

$$\Pi_G v=\int_G(v,\nu)\,dS,$$

Теорема Стокса (называемая в этом случае теоремой Остроградского) утверждает, что в случае, когда поверхность G ограничивает область D, выполняется равенство

$$\int_G(v,\nu)\,dS=\int_D(\operatorname{div}v)\,dV\ .$$

Наличие римановой структуры позволяет отождествить вектора также и с 1-формами, $v \mapsto \alpha_v^1 = (v, \cdot)$. Кроме того, элемент объема имеется на подмногообразиях всех размерностей, в частности, *элемент длины* на кривой γ — это 1-форма $dl = \alpha_\tau^1$, где τ — единичный касательный вектор кривой. Интеграл

$$Ц_\gamma v = \int_\gamma \alpha_v^1 = \int_\gamma (v, \tau)\, dl$$

называется *циркуляцией* поля v вдоль кривой γ. Если M трехмерно, то $2 = n - 1$, и по определению, $d\alpha_v^1 = \omega_{\mathrm{rot}\, v}$. Теорема Стокса для 1-форм в этом случае принимает такой вид: если область G двумерной поверхности ограничена замкнутой кривой γ, то циркуляция поля v вдоль нее равна потоку ротора поля v через G,

$$Ц_\gamma v = \Pi_G \mathrm{rot}\, v\,, \qquad \oint_\gamma (v, \tau)\, dl = \int_G (\mathrm{rot}\, v, \nu)\, dS\;.$$

2. Найдите координаты поля w, задающего 2-форму $\omega_w^2 = \alpha_u^1 \wedge \alpha_v^1$.

3. Определите функцию f, задающую 3-форму $\alpha_u^1 \wedge w_v^2 = f\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Явные формулы векторного анализа в размерностях, больших трех, также находят важные применения. Например, 2-форма в $\mathbb{R}^4$ задается 6 коэффициентами.

4. Найдите выражение для дифференциала 2-формы в $\mathbb{R}^4$.

Примером применения предыдущей задачи являются уравнения Максвелла. Электромагнитное поле в $\mathbb{R}^3$ задается двумя полями $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$. Уравнения распространения электромагнитных волн в вакууме имеют вид

$$\begin{array}{ll} \mathrm{div}\, H = 0, & \mathrm{rot}\, E = -\frac{1}{c}\dot{H} \\ \mathrm{div}\, E = 0, & \mathrm{rot}\, H = \frac{1}{c}\dot{E} \end{array}$$

Из решения предыдущей задачи видно, что эти уравнения можно записать в виде

$$dF = 0, \qquad d(*F) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F &= -E_1 dx_0 \wedge dx_1 - E_2 dx_0 \wedge dx_2 - E_3 dx_0 \wedge dx_3 + H_1 dx_2 \wedge dx_3 + H_2 dx_3 \wedge dx_1 + H_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ *F &= H_1 dx_0 \wedge dx_1 + H_2 dx_0 \wedge dx_2 + H_3 dx_0 \wedge dx_3 + E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Здесь $x_0 = ct$, а x_1, x_2, x_3 — координаты точки в $\mathbb{R}^3$. Связь между формами F и $*F$ состоит в следующем. Наличие невырожденного скалярного произведения в касательном пространстве к многообразию M задает скалярное произведение и во всех его внешних степенях, что вместе со спариванием $\Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^n(M)$, задаваемым внешним умножением, дает отождествления $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$. При $n = 4$ если $k = 2$, то и $n - k = 2$. Оказывается, что оператор $*$, участвующий в уравнениях Максвелла, соответствует $(1,3)$-метрике Минковского $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ в четырехмерном пространстве-времени, которая невырождена, хотя и не является знакоопределенной.

Из замкнутости 2-формы F вытекает ее точность, $F = dA$. 1-форма A, определенная с точностью до полного дифференциала, называется векторным потенциалом. Долгое время считалось, что векторный потенциал является математической абстракцией, лишенной физического смысла, и лишь недавно было обнаружено (фаза Берри, квантовый эффект Холла) экспериментальное подтверждение его существования.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 2-й курс 15 ноября 2010 года

Листок X

Определение. Функция в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *гармонической*, если она удовлетворяет уравнению Лапласса

$$\Delta u = 0, \quad \text{т.е.} \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0.$$

1. Найдите все сферично-симметричные гармонические функции в дополнении к началу координат в $\mathbb{R}^n$. (Ответ: $u = c_0 + c_1 r^{2-n}$ при $n \geqslant 3$ и $c_0 + c_1 \ln |r|$ при $n = 2$.)

2. Вычислите среднее значение гармонической функции по сфере заданного радиуса (Ответ: значение функции в центре сферы. Это — **теорема о среднем** для гармонических функций).

   Принцип максимума. *Максимум и минимум (непостоянной) гармонической функции не может достигаться во внутренней точки области ее определения.*

3. Докажите принцип максимума для гармонической функции.

4. Найдите среднее значение для функции $1/|x|$ в $\mathbb{R}^3$ на сфере радиуса R с центром в точке X.

5. Найдите среднее значение для функции $\ln |x|$ в $\mathbb{R}^2$ по окружности радиуса R с центром в точке X.

6. Найдите силу притяжения кругового кольца $1 \leqslant |x| \leqslant 1 + \varepsilon$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с равномерно распределенной массой внутри кольца и с потенциалом $u(x) = m \ln |x - X|$ для точечной массы m сосредоточенной в точке X плоскости.

7. Найдите силу притяжения области, заключенной между двумя гиперболами $1 \leqslant x\,y \leqslant 1 + \varepsilon$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с равномерно распределенной массой в этой области и с потенциалом $u(x) = m \ln |x - X|$ для точечной массы m сосредоточенной в точке X плоскости.