ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ. ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2006.

ЛИСТОК 6. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ И ГРУППЫ ВЕЙЛЯ.

Через Δ обозначена неприводимая приведенная система корней в евклидовом пространстве V.

6.1[!] (Длины и углы). а) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$ таковы, что $(\alpha, \beta) > 0, \alpha \neq \beta$ и $(\alpha, \alpha) \leqslant (\beta, \beta)$. Тогда $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = 1$, $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 1, 2, 3$. В указанных случаях, соответственно, $(\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)$ и угол между α, β равен $\pi/3$, $(\beta, \beta) = 2(\alpha, \alpha)$ и угол между α, β равен $\pi/4$, и, наконец, $(\beta, \beta) = 3(\alpha, \alpha)$ и угол между α и β равен $\pi/6$.

б) Докажите, что в Δ имеются корни не более чем двух разных длин (длинные и короткие корни).

6.2[!]. Докажите, что корни одинаковой длины в Δ сопряжены относительно действия группы Вейля.

6.3[!]. Как связаны между собой системы простых корней в Δ и $\Delta^\vee$?

6.4[!] (Максимальный корень). Фиксируем систему простых корней в Δ. Это определяет частичный порядок на V: $v_1 \succeq v_2$, если $v_1 - v_2$ является комбинацией простых корней с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что найдется единственный корень в Δ, максимальный относительно выбранного порядка (*максимальный корень*). Докажите, что он длинный. Докажите, наконец, что среди коротких корней также найдется единственный максимальный (*максимальный короткий корень*). Найдите выражения максимального корня (соотв. максимального короткого корня) через простые корни для корневых систем типов $A - G$ (соотв. B, C, F, G).

6.5[!] (Фундаментальные веса). Фиксируем в Δ систему простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. *Фундаментальный вес*, соответствующий корню α_i, — это элемент $\pi_i \in V$, для которого $\langle \pi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$. Выпишите явно фундаментальные веса для всех систем корней. Докажите, что матрица перехода от базиса $\pi_1, \dots, \pi_r$ к базису $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ совпадает с матрицей Картана. Наконец, докажите, что сумма фундаментальных весов совпадает с полусуммой положительных корней.

6.6 (Решетка весов и фундаментальная группа). Решеткой весов системы корней Δ называется подгруппа в V, которая состоит из всех элементов $v \in V$, для которых $\langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha^\vee \in \Delta^\vee$. Обозначаем мы эту решетку через P.

а) Докажите, что базисом в P являются фундаментальные веса $\pi_1, \dots, \pi_r$, и что решетка корней Q (т.е. решетка, порожденная Δ) содержится в P.

б) Группа P/Q называется *фундаментальной группой* системы корней Δ. Докажите, что системы корней имеют следующие фундаментальные группы:

$A_n - \mathbb{Z}_{n+1}, B_n, C_n, E_7 - \mathbb{Z}_2$, $D_{2n} - \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_{2n+1} - \mathbb{Z}_4$, $E_6 - \mathbb{Z}_3$, $G_2, F_4, E_8 - 0$.

в) Установите естественную двойственность между фундаментальными группами Δ и $\Delta^\vee$.

г) Докажите, что группа Вейля оставляет на месте решетки корней и весов и действует тривиально на фундаментальной группе.

6.7 (Носитель). *Носителем* корня $\alpha \in \Delta$ называется множество простых корней, входящих в разложение α с ненулевыми коэффициентами. Докажите, что носитель нельзя разбить на два взаимно перпендикулярных подмножества (это свойство называют связностью носителя). Докажите, не прибегая к классификации, что носитель максимального корня совпадает со всей системой простых корней.

6.8 (Параболические подмножества). Подмножество $X \subset \Delta$ назовем *параболическим*, если оно замкнуто относительно сложения (в том смысле, что $\alpha, \beta \in X, \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in X$) и содержит все положительные корни (относительно некоторого выбора системы простых корней).

а) Пусть $\Sigma \subset \Pi$. Тогда $X_\Sigma := \Delta_+ \cup (\Delta_- \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_i, i \in \Sigma))$ (где Δ_+, Δ_- — системы положительных и отрицательных корней) является параболическим подмножеством в Δ.

б) Докажите, что любое параболическое подмножество в Δ сопряжено под действием группы Вейля множеству вида X_Σ.

в) Подмножество Σ в предыдущем пункте определено однозначно.

6.9 (Корневые подсистемы). Подмножество $\Delta_1 \subset \Delta$ называется *корневой подсистемой*, если оно замнуто относительно сложения и умножения на -1. Оно само является системой корней в порожденном им подпространстве.

а) Если U — подпространство в V, то $\Delta \cap U$ — корневая подсистема в Δ.

б) Любая подсистема из предыдущего пункта сопряжена под действием группы Вейля подсистеме вида $\Delta_\Sigma = \Delta \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Sigma), \Sigma \subset \Pi$.

6.10 (Максимальные корневые подсистемы). Выберем систему простых корней $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \Delta$, и пусть $\delta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$ — максимальный корень.

а) Если $n_i = 1$, то $\Delta_{\Pi \setminus \{\alpha_i\}}$ является максимальной (собственной) корневой подсистемой в Δ.

б) Если n_i — простое число, то корневая подсистема, порожденная $\Pi \setminus \{\alpha_i\} \cup \{-\delta\}$ является максимальной.

в*) Любая максимальная собственная корневая подсистема в Δ сопряжена (под действием группы Вейля) подсистеме из пунктов а),б). Единственна ли последняя?

6.11. Докажите, что группа Вейля содержит единственный элемент w_0 максимальной длины. Найдите этот элемент для групп Вейля систем корней типов $A - G$. Не пользуясь классификацией, докажите, что $-w_0$ оставляет на месте положительную камеру Вейля.

6.12 (Задание группы Вейля образующими и соотношениями). а) Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — система простых корней в Δ. Обозначим через s_i отражение относительно простого корня α_i. Докажите, что $s_i^2 = 1$, и что $(s_i s_j)^{r_{ij}} = 1$, где угол между α_i, α_j составляет $\pi - \pi/r_{ij}$.

б*) Докажите, что группа Вейля — это группа с образующими $s_i, i = \overline{1, n}$, и соотношениями $s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{r_{ij}} = 1$. [1]

[1] Указание: пусть W' есть соответствующая группа. Для положительной камеры Вейля C рассмотрите топологическое пространство $U = W' \times C/\sim$, где $(w_1, x_1) \sim (w_2, x_2)$, если $x_1 = x_2$ и $w_1 w_2^{-1}$ лежит в подгруппе порожденной теми из отражений s_i, которые оставляют на месте x_1. Постройте естественное отображение $U \to V$ и покажите, что оно изоморфизм.