# ЭКЗАМЕН 10 ДЕКАБРЯ 2006 Г.

*Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:*

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен,* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО****.*
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

**Задача 1** (по классической дифференциальной геометрии). Пусть $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений (узел), и пусть $M_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in S^1,\ |x - \gamma(t)| \le r\}$. Докажите, что при достаточно малых $r$ множество $M_r$ представляет собой вложенное подмногообразие с краем и его объем равен $\pi r^2 \ell$, где константа $\ell$ называется длиной кривой $\gamma$.

**Задача 2** (по когомологиям групп Ли). Пусть $G$ — группа сохраняющих ориентацию движений плоскости, действующая на себе посредством левых сдвигов: $L_A(B) \stackrel{\text{def}}{=} AB$, где $A, B \in G$. а) Введите в $G$ структуру гладкого многообразия; опишите какую-нибудь систему координат на нем. б) Пусть $\Omega(G)$ — пространство дифференциальных форм на $G$, инвариантных относительно левых сдвигов. Докажите, что оператор $d$ внешнего дифференцирования переводит $\Omega(G)$ в себя. в) Пусть $H^1_G(G) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} d : \Omega^1(G) \to \Omega^2(G) / \operatorname{Im} d : \Omega^0(G) \to \Omega^1(G)$ ("первые левоинвариантные когомологии де Рама" $G$). Найдите в $H^1_G(G)$ базис и запишите какие-нибудь представляющие его дифференциальные 1-формы в координатах, введенных в пункте 2а.

**Задача 3** (по комплексному анализу). а) Пусть $f(z) = z^n Q(z)$, где $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, а $Q$ — рациональная функция, для которой $Q(0) \ne 0, \infty$. Докажите, что $\int_\omega df/f = 2\pi i n$, где $\omega$ — достаточно малая окружность с центром в начале координат. б) Пусть $Q$ — рациональная функция комплексного переменного, а $\omega \subset \mathbb{C}$ — окружность, не проходящая через ее нули и полюса. Докажите, что $\int_\omega dQ/Q = 2\pi i N$, где $N$ — сумма порядков всех нулей и всех полюсов функции $Q$, лежащих внутри окружности $\omega$; порядок полюса берется со знаком минус.

**Задача 4** (по фробениусовым многообразиям). Пусть $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — отображение, заданное в координатах равенством $e_i = \sigma_i(x)$, где $\sigma_i$ — элементарный симметрический многочлен степени $i = 1, \dots, n$. Обозначим $D(x) = \prod_{i \ne j}(x_i - x_j)$. а) Докажите, что в $\mathbb{C}^n$ существуют гладкие векторные поля $Y_1, \dots, Y_n$ такие, что $\sigma'(a) Y_i(a) = D(a) \frac{\partial}{\partial e_i}$ для всех $a \in \mathbb{C}^n$. б) Вычислите $[Y_1, Y_2]$ при $n = 2$. в) Вычислите $[Y_1, Y_n]$ при произвольном $n$.

**Задача 5** (по топологии). Пусть $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$, $f : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение, причем $f(t,0) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$, и все кривые $f(\cdot, s) : S^1 \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le s \le 1)$ гладкие. Докажите, что у каждой такой кривой имеется точка самопересечения.

**Указание.** Докажите, что если кривая $f(\cdot, s)$ — общего положения, то число ее точек самопересечения нечетно.