Анализ, 1 семестр (осень 2006)
Повторный экзамен 18 февраля 2007
На работу отводится 4 часа
Разрешается пользоваться записками лекций и своими записями

1. Пусть

$$f(x) = \sin(\sin(\ldots(\sin x)))$$

(100 знаков sin). Найдите $f'''(0)$.

2. Функция $f\colon [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ такова, что для любого сходящегося ряда с неотрицательными членами $\sum_n a_n$ ряд $\sum_n f(a_n)$ сходится. Докажите, что $f(x) = O(x)$ при $x \to 0$.

3. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2^n}.$$

4. Пусть $x_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}(1 - \frac{1}{n})^k$. Найдите асимптотику последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$.

5. Пусть $C \subset [0;1]$ — «классическое» канторово множество (получаемое удалением средних третей отрезков).

а) Можно ли найти такие числа $\alpha > 1$ и $K > 0$ и функцию $f\colon C \to \mathbb{R}$, что $|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$ для всех $x, y \in C$, но при этом f непостоянна?

б) Каков будет ответ на этот вопрос, если заменить C на отрезок $[0;1]$?

6. Из начала координат на плоскости выпустили в каждом направлении по отрезку (ненулевой длины) таким образом, что множество F, являющееся объединением этих отрезков, замкнуто.

а) Покажите, что начало координат не обязано быть внутренней точкой множества F.

б) Покажите, что у множества F есть внутренние точки.