Квадратичные формы

По умолчанию V — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$, $q : V \times V \to \mathbb{R}$ — симметричная билинейная форма, $U, W \subset V$ — линейные подпространства, $U^\perp = \{v \in V \mid q(v,u) = 0 \ \forall u \in U\}$ — *ортогональное дополнение* к U, $\operatorname{Ker} q = V^\perp$ — *ядро* f. Через $q(x)$ будем обозначать $q(x,x)$.

1. Докажите, что если q невырождена, то $\dim U^\perp + \dim U = n$ и $(U^\perp)^\perp = U$. При каких условиях $V = U \oplus U^\perp$?

2. (**ортогонализация Грама-Шмидта**) Пусть A — матрица формы q в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ (т.е. $q(x) = x^t A x$), $V_k = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $V_0 = 0$, и A_k — матрица ограничения q на V_k. Предположим, что $\det A_k \neq 0$ для всех k (в частности, q невырождена).

a) Докажите, что существует ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_n)$ пространства V такой, что $f_k \in e_k + V_{k-1}$;

b) докажите, что такой базис единственен;

c) выразите $q(f_k)$ через определители $\det A_i$.

3. Докажите, что существует базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V, в котором $q(e_i) = 1$ если $i \leq p$, $q(e_i) = -1$ если $p < i \leq p + q$, и $q(e_i) = 0$ если $p + q < i \leq p + q + r = n$.

Тройка чисел (p, q, r) называется *сигнатурой* формы q. Если форма невырождена, то ее сигнатурой называют пару чисел (p, q).

4. Пусть q — форма сигнатуры (p, q, r). Докажите, что

a) размерность максимального положительно определенного подпространства равна p;

b) размерность максимального отрицательно определенного подпространства равна q;

c) размерность ядра равна r;

d) размерность максимального изотропного подпространства равна $\min(p, q) + r$;

e) размерность максимального неположительно определенного подпространства равна $q + r$;

f) размерность максимального неотрицательно определенного подпространства равна $p + r$;

g) сигнатура формы не зависит от базиса.

5. Докажите, что каждый изотропный вектор e включается в гиперболическую плоскость (т.е. существует изотропный вектор f такой, что $q(e, f) = 1$).

6. (**неравенство Коши-Буняковского-Шварца**) Пусть q положительно определена. Тогда для любых ненулевых $e, f \in V$ выполняется

$$q(e, f)^2 \leq q(e, e) q(f, f)$$

7. Пусть $n = 3$ и $q(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$.

a) Нарисуйте множества изотропных, отрицательных и положительных векторов;

b) докажите, что если $q(x) < 0, q(y) < 0$ и $x_0 y_0 > 0$, то $q(x, y)^2 \geq q(x, x) q(y, y)$;

c) докажите, что $q(x) < 0$ тогда и только тогда, когда плоскость $x^\perp$ пересекает конус неположительных векторов только в начале координат;

d) докажите, что $q(x) > 0$ тогда и только тогда, когда плоскость $x^\perp$ пересекает внутренность конуса неположительных векторов;

e) докажите, что $q(x) = 0$ тогда и только тогда, когда плоскость $x^\perp$ касается конуса неположительных векторов.

Линейный оператор в квадратичном пространстве (V, q) называется *ортогональным*, если он сохраняет форму q, т.е. для любых $x, y \in V$ выполняется $q(Ax, Ay) = q(x, y)$. Ортогональные операторы образуют *ортогональную группу* $O_q(V)$.

8. Пусть V и q такие же, как и в предыдущей задаче. Докажите, что

a) для любого анизотропного вектора $v \in V$ (т.е. $q(v) \neq 0$) отражение $R_v(x) = x - 2\frac{q(v,x)}{q(v,v)} v$ является ортогональным преобразованием;

b) для любого $\lambda \neq 0$ группа $O_q(V)$ действует транзитивно на множестве $\{v \in V \mid q(v) = \lambda\}$;

c) любое ортогональное преобразование можно представить в виде произведения не более чем трех отражений.