1 Вариационный алгоритм Гюйгенса

Основной алгоритм. Модификация основного алгоритма. Исследование и дополнительные требования. Как определить геодезический поток? Обобщение основного алгоритма. Изменения в параметрическом случае.

На прошлых лекциях мы детально изучили проблему достаточных условий экстремума в различных ситуациях. Внимательный читатель мог бы увидеть, что наши рассуждения, на самом деле, покоятся на некоторой общей схеме, которая и составляет, так называемый, *вариационный принцип Гюйгенса*. В действительности, чтение (и изложение) курса лекций можно было бы начать с вариационного принципа Гюйгенса и, используя его, получить все нужные результаты. Этому, дедуктивному, методу изложения мы, однако, предпочли другой — индуктивный, проделав всю работу "вручную" с тем, чтобы потом (в данной лекции) изложить общие принципы теории.

1. Основной алгоритм. Мы рассматриваем на множестве кривых $x(t)$ класса C^1 с фиксированными концами M_0, M_1 и функционал

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{1}$$

Пусть $x_0(t)$ — некоторая кривая этого класса.

Теорема 1.1 *Если существует такая функция $S = S(x,t)$, что ее полная производная*

$$\Phi(t, x, \dot{x}) = S_t + \dot{x} S_x \tag{2}$$

удовлетворяет условиям

1) *на кривой $x = x_0(t)$*

$$L(t, x_0, \dot{x}_0) = \Phi(t, x_0, \dot{x}_0); \tag{3}$$

2) *на всех кривых класса C^1*

$$L(t, x, \dot{x}) \geq \Phi(t, x, \dot{x}), \tag{4}$$

то $I[x(t)]$ имеет в классе C^1-кривых с фиксированными концами минимум на кривой $x = x_0(t)$.

Доказательство. Мы имеем, в силу условия 1),

$$\begin{aligned} I[x_0(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \{S(x_0(t), t) + \dot{x}(t) S_x(x_0(t), t)\}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x_0(t), t)\, dt = S(M_1) - S(M_0) \qquad (5) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x(t), t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x, \dot{x})\, dt, \end{aligned}$$

где $x(t)$ — любая C^1 — кривая с концами M_0 и M_1. Поэтому для любой такой кривой

$$I[x(t)] - I[x_0(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [L(t, x, \dot{x}) - \Phi(t, x, \dot{x})]\, dt \geq 0 \tag{6}$$

в силу условия 2).

2. Модификация основного алгоритма. Пусть Ω — некоторая область, $\mathcal{A}$ — семейство кривых класса $C^1([t_0, t_1])$, такое, что через каждую точку области Ω проходит некоторая кривая из $\mathcal{A}$.

Теорема 1.2 *Если существует полная производная $\Phi = S_t + \dot{x} S_x$ такая, что $L \geq \Phi$ для любой кривой класса C^1 и $L = \Phi$ для любой кривой из $\mathcal{A}$, то $I[x(t)]$ имеет минимум на всех кривых класса $\mathcal{A}$ в классе кривых с фиксированными концами.*

Доказательство — прямое следствие Теоремы 1.1.

3. Исследование и дополнительные требования. Условие $L \geq \Phi$ означает, что график функции $L(t, x, \dot{x})$ (рассматриваемой как функции от $\dot{x}$) лежит выше плоскости $y = S_t + \dot{x}\, S_x$. Условие $L = \Phi$ на кривых класса $\mathcal{A}$ означает, что в точке $\dot{x} = \xi(x, t)$, где $\xi(x, t)$ — наклон кривой класса $\mathcal{A}$ в точке (x, t), указанные графики пересекаются. Итак, плоскость

$$y = S_t(x, t) + \dot{x}\, S_x(x, t) \tag{7}$$

является касательной к графику функции

$$y = L(t, x, \dot{x}) \tag{8}$$

в точке $\dot{x} = \xi(x, t)$ и лежит целиком ниже этого графика.

При выполнении указанного условия $\xi(x, t)$ называется *геодезическим* наклоном.

Дадим точное

Определение 1.3 Функция $\xi = \xi(x, t)$ называется *геодезическим наклоном,* если существует такая полная производная

$$\Phi = S_t + \dot{x}\, S_x,$$

что $L \geq \Phi$ на всех элементах $(t, x, \dot{x})$, причем равенство достигается лишь на $(t, x, \xi(x, t))$.

Наложим следующие дополнительные *требования*:

1^o. Функция $L(t, x, \dot{x})$ выпукла по $\dot{x}$ и

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} > 0 \tag{9}$$

(*невырожденность*).

2^o. Через каждую точку области Ω проходит ровно одна кривая семейства $\mathcal{A}$; геодезический наклон $\xi(x,t)$ является гладкой функцией *(регулярность)*.

Итак, кривые семейства $\mathcal{A}$ являются *кривыми геодезического наклона*, то есть решениями уравнения

$$\dot{x} = \xi(x,t). \tag{10}$$

Из условия касания в точке (10) графиков функций (7) и (8) вытекают *основные уравнения вариационного исчисления*:

$$\begin{aligned} S_x(x,t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(x,t)), \\ S_t(x,t) &= L(t,x,\xi(x,t)) - \xi(x,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(x,t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Замечание 1.4 Уравнения (2) показывают, что Φ однозначно определяются геодезическим наклоном.

4. Как определить геодезический наклон? Из существования Φ и уравнения (11) вытекает инвариантность (независимость от выбора кривой $x(t)$ с фиксированными концами) *интеграла Гильберта*

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(x,t))\,dx + [L(t,x,\xi(x,t)) - \xi(x,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(x,t))]\,dt. \tag{12}$$

В свою очередь, из инвариантности интеграла Гильберта вытекает, что каждая кривая геодезического наклона удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{13}$$

Прямое доказательство этого факта было дано ранее. Мы дадим альтернативное доказательство, основанное на следующих утверждениях:

Предложение 1.5 *Пусть $L(\dot{x})$ — выпуклая функция, а*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}}$$

невырождена (и, следовательно, положительно определена).

Тогда преобразование Лежандра

$$L(\dot{x}) \mapsto H(p) = p\,\dot{x}\,(p) - L(\dot{x}\,(p)), \tag{14}$$

где $\dot{x}=\dot{x}\,(p)$ — решение уравнения

$$p = \frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}} \tag{15}$$

инволютивно (то есть обратное преобразование существует и задается такой же формулой

$$L(\dot{x}) = \dot{x}\,p(\dot{x}) - H(p(\dot{x})), \tag{16}$$

где $p = p(\dot{x})$ *— решение уравнения*

$$\dot{x}= \frac{\partial H}{\partial p}(p)). \tag{17}$$

Предложение 1.6 *Пусть* $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ *— лагранжево многообразие,* $H(x,p)$ *— гладкая функция. Тогда, если* $H(x,p)|_{\mathcal{L}} = \mathrm{const}$*, то* $\mathcal{L}$ *инвариантно относительно гамильтонова векторного поля*

$$V(H) = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}. \tag{18}$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [МСШ].

Опираясь на эти предложения, докажем следующую теорему.

Теорема 1.7 *Кривые геодезического наклона удовлетворяют уравнениям Эйлера.*

Доказательство. а) Пусть

$$\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^{n+1}_{x,t} \times \mathbf{R}_{n+1,p,E}$$

— лагранжево относительно структурной формы $dE \wedge dt + dp \wedge dx$ многообразие, определяемое функцией $S(x,t)$ по формулам

$$\begin{cases} p = p(x,t) = \dfrac{\partial S}{\partial x}(x,t), \\ E = E(x,t) = \dfrac{\partial S}{\partial t}(x,t). \end{cases} \tag{19}$$

Из первого из уравнений (11) следует, что

$$p = \frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}(t, x, \xi(x,t)),$$

то есть точки $\xi(x,t)$ и $p(x,t)$ соответствуют друг другу при преобразовании Лежандра. Далее, пусть $H(t,x,p)$ — преобразование Лежандра (по $\dot{x}$) функции $L(t,x,\dot{x})$. Тогда $\mathcal{L}$ лежит на нулевом уровне функции $E+H(t,x,p)$. Действительно, в силу (11), (11) и (14) имеем

$$E(x,t)=L(t,x,\xi(x,t))-\xi(x,t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(x,t))=-H(t,x,p(x,t)). \tag{20}$$

б) Из Предложения 1.6 вытекает теперь, что $\mathcal{L}$ инвариантно относительно векторного поля $V(E+H)$, то есть траектории системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial p}(t,x,p), \\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(t,x,p), \\ \dot{E}=-\dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x,p), \end{cases} \tag{21}$$

или целиком лежат в $\mathcal{L}$, или не пересекаются с $\mathcal{L}$.

в) Пусть теперь $(x(t),p(t),E(t))$ — траектория системы (21), лежащая на $\mathcal{L}$. В силу предложения 1.5, имеем

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t))=\xi(x(t),t). \tag{22}$$

(Действительно, точки $\xi(x,t)$ и $p(x,t)$ соответствуют друг другу при преобразовании Лежандра, а $p(t)=p(x(t),t)$, поскольку траектория лежит на $\mathcal{L}$).

Обратно, пусть $x(t)$ — траектория системы (10). Рассмотрим траекторию $\gamma(t)$ системы (21) на $\mathcal{L}$, начальная точка которой проектируется в $x(t_0)$. Проекция траектории $\gamma(t)$ на (x,t) плоскость удовлетворяет, по доказанному выше, системе (10), и, следовательно, совпадает с $x(t)$.

Итак, *каждая кривая геодезического наклона есть проекция траектории системы Гамильтона* (21), *лежащей на некотором фиксированном лагранжевом многообразии* $\mathcal{L}$.

г) Далее, так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p) &= p\frac{\partial \dot{x}(t,x,p)}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial x}(t,x,\dot{x}(t,x,p))-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\dot{x}(t,x,p))\frac{\partial \dot{x}(t,x,p)}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x}(t,x,\dot{x}(t,x,p)), \end{aligned} \tag{23}$$

то из второго из уравнений системы (21) вытекает уравнение Эйлера (13).

При построении лагранжевых многообразий, лежащих на уровне гамильтониана $H=H(x,p)$, полезно следующее утверждение:

Предложение 1.8 *Пусть* $\mathcal{L}_0 \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ *— многообразие размерности* $n-1$ *такое, что*

$$dp \wedge dx|_{\mathcal{L}_0} = 0, \quad H(x,p)|_{\mathcal{L}_0} = 0, \tag{24}$$

в поле $V(H)$ *трансверсально* $\mathcal{L}_0$*. Тогда фазовый поток* $\mathcal{L}$ *многообразия* $\mathcal{L}_0$ *вдоль векторного поля* $V(H)$ *есть лагранжево многообразие такое, что* $H(x,p)|_{\mathcal{L}} = 0$.

Доказательство можно найти в [МСШ].

Итак, для построения геодезического потока нужно:

1) выбрать многообразие $\mathcal{L}_0 \subset \mathbf{R}^{n+1}_{x,t} \oplus \mathbf{R}_{n+1,p,E}$, удовлетворяющее условиям Предложения 1.8;

2) построить фазовый поток $\mathcal{L}$ многообразия $\mathcal{L}_0$ вдоль поля $V(E+H)$;

3) определить область Ω однозначности проекции $\mathcal{L}$ на $\mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$;

4) определить

$$\xi(x,t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p(x,t)), \tag{25}$$

(здесь $p = p(x,t)$; $E = E(x,t)$ — уравнения многообразия $\mathcal{L}$)[1].

5. Обобщение основного алгоритма. Пусть $\xi(x,t)$ — геодезический наклон

$$\Phi = S_t + \dot{x}\, S_x$$

— соответствующая полная производная.

Геодезическим уровнем (или *трансверсалью*) будем называть многообразие уровня функции S:

$$Y_C = \{(x,t) \,|\, S(x,t) = C\}. \tag{26}$$

Определим *функцию Вейерштрасса* $\mathcal{E}$ равенством

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(t,x,\dot{x},\xi) \stackrel{\text{def}}{=} L(t,x,\dot{x}) - L(t,x,\xi) - (\dot{x} - \xi)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi), \tag{27}$$

Из требования 1^o (см. (9)) вытекает, что

$$\mathcal{E} \geq 0, \text{ причем } \mathcal{E} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \dot{x} = \xi.$$

Теорема 1.9 (формула Вейерштрасса) *Пусть* $x = x(t)$ *— кривая, соединяющая геодезические уровни* Y_{C_1} *и* Y_{C_2}*, а* $x_0(t)$ *— кривая геодезического наклона, соединяющая те же уровни. Тогда*

$$I[x(t)] = I[x_0(t)] + \int\limits_{x=x(t)} \mathcal{E}(t,x,\dot{x},\xi(x,t))\, dt. \tag{28}$$

[1] Реализация условий 1)–4) для конкретных типов задач будет дана ниже.

Доказательство. В силу (11) имеем

$$\begin{aligned} I[x(t)] &= \int\limits_{x=x(t)} L(t,x,\dot{x})\,dt = \int\limits_{x=x(t)} \mathcal{E}(t,x,\tilde{\dot{x}},\xi(x,t))\,dt \\ &\quad + \int\limits_{x=x(t)} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t}(x,t) + \dot{x}\,\frac{\partial S}{\partial x}(x,t) \right\} = C_2 - C_1 \\ &\quad + \int\limits_{x=x(t)} \mathcal{E}(t,x,\dot{x},\xi(x,t))\,dt. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее, с учетом того, что $\mathcal{E} = 0$ на $x = x_0$, получаем

$$I[x_0(t)] = C_2 - C_1. \tag{30}$$

Из (29) и (30) получаем (28). Теорема доказана.

Очевидно, что *многообразие* $X \subset \mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$ *является подмногообразием некоторого геодезического уровня тогда и только тогда, когда*

$$p\,dx|_{\pi^{-1}(X)\cap\mathcal{L}} = 0, \tag{31}$$

(поскольку $\pi^*(dS) = p\,dx$).

Теорема 1.10 *Пусть* $\xi(x,t)$ *— геодезический наклон и* Y_{C_1}, Y_{C_2} *— геодезические уровни,* $X_1 \subset Y_{C_1}$, $X_2 \subset Y_{C_2}$ *— подмногообразия,* $x = x_0(t)$ *— некоторая (любая) кривая геодезического наклона, соединяющая* X_1 *с* X_2*. Тогда эта кривая реализует минимум функционала* $I[x(t)]$ *среди всех кривых с началом в* X_1 *и концом в* X_2*.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольная кривая, соединяющая X_1 с X_2. По формуле Вейерштрасса

$$I[x(t)] = I[x_0(t)] + \int\limits_{x=x(t)} \mathcal{E}(t,x,\dot{x},\xi(x,t))\,dt \geq I[x_0(t)]. \tag{32}$$

Замечание 1.11 Равенство в формуле (32) достигается, только если $x = x(t)$ — также кривая геодезического наклона.

6. Параметрический случай. Пусть теперь

$$I[l] = \int\limits_{l} L(x,\dot{x})\,dt, \tag{33}$$

причем

$$L(x,\lambda\,\dot{x}) = \lambda L(x,\dot{x}) \tag{34}$$

так что $I[l]$ не зависит от параметризации. Тогда

1) функция S не зависит от t явно: $S = S(x)$, при этом $\Phi = \dot{x}\, S_x(x)$ также является *однородной функцией* степени 1;

2) геодезический наклон $\dot{x} = \xi(x)$ определен с точностью до умножения на положительные числа, то есть $\xi(x)$ — *направление* (а не вектор);

3) требование 1^o (см. (9)) заменяется условием: множество

$$A = \{\dot{x} \mid L(x, \dot{x}) = 1\}$$

выпукло и отображение

$$\begin{aligned} \alpha :\ A &\xrightarrow{\alpha} \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}, \\ (x, \dot{x}) &\mapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{aligned} \qquad (35)$$

является *вложением*;

4) *основное уравнение* (11) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \xi(x)); \qquad (36)$$

при этом равенство $H|_{\mathcal{L}} = 0$ заменяется на включение $\mathcal{L} \subset \mathrm{Im}\alpha$;

5) *гамильтоново векторное* поле заменяется на поле направлений, заданное любой функцией H, постоянной на $\mathrm{Im}\alpha$.

Упражнение 1.12 Провести самостоятельно доказательство для параметрического случая. (Указание: локально параметрический случай можно свести к непараметрическому, налагая условие $\dot{x}^1 = 1$).

Литература

[ЗеТр] Г. Зейферт, В. Трельфалль. *Вариационное исчисление в целом*, Гос. изд-во иностр. литературы, Москва, 1947.

[ИоТи] Л.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. *Теория экстремальных задач*. Наука, Москва, 1974.

[Мас] В.П. Маслов. *Асимптотические методы и теория возмущений*. Наука, Москва, 1988.

[Мил] Дж. Милнор. *Теория Морса*. Мир, Москва, 1965.

[МСШ] А.С. Мищенко, Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов. *Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора*. Наука, Москва, 1978.

[Янг] Л. Янг. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*. Мир, Москва, 1974.