1 Достаточные условия экстремума “в малом” (параметрический случай)

Система уравнений Эйлера. Ее вырожденность. Покрытия. Однократные покрытия. Геодезический наклон. Достаточные условия минимума. Гамильтонова интерпретация.

1. Уравнения Эйлера в параметрическом случае. Рассматривается задача о минимизации функционала

$$I[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt. \tag{1}$$

Здесь $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\gamma = \{x^i = x^i(t), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

— кривая, соединяющая точки $A(x_0)$ и $B(x_1)$, лагранжиан $L(x, \dot{x})$ положительно однороден первой степени по $\dot{x}$:

$$L(x, \lambda\, \dot{x}) = \lambda L(x, \dot{x}), \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

так что функционал $I[\gamma]$ не зависит от параметризации кривой γ.

Исследуем систему уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

для функционала (1). Система (3) является *вырожденной.* Действительно, совершим преобразование Лежандра

$$l:\ (x, \xi) \mapsto (x, p) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial\, \dot{x}}(x, \xi)\right). \tag{4}$$

Функция $(x, \partial L/\partial\, \dot{x}\, (x, \xi))$ однородна степени 0 по переменным ξ, то есть отображение l постоянно на лучах $\{\xi = \lambda \xi_0\}$, $\lambda > 0$ и, следовательно, может быть факторизовано на сферу

$$S^{n-1}_\xi = \mathbf{R}^n_{*\xi}/\mathbf{R}_+$$

(фактор пространства $\mathbf{R}^n_{*\xi} = \mathbf{R}^n_\xi \backslash \{0\}$ по действию группы $\mathbf{R}_+ = \{\lambda > 0\}$). Таким образом,

$$l(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_{*\xi}) = l(\mathbf{R}^n_x \times S^{n-1}_\xi). \tag{5}$$

Наложим на l требование *максимальной невырожденности*, а именно, потребуем, чтобы отображение

$$l:\ \mathbf{R}^n_x \times S^{n-1}_\xi \to \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np} \tag{6}$$

было *вложением*.

Дальнейшее исследование проведем в координатах. Рассмотрим для определенности аффинную карту на S^{n-1}_ξ, в которой $\xi^1 = 1$, то есть координаты имеют вид $\xi^i_* = \xi^i/\xi^1$, $i = 2,\dots,n$. Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение: если $z = (z_1,\dots,z_n)$, то $z' \overset{\mathrm{def}}{=} (z_2,\dots,z_n)$. В частности, $\xi' = (\xi^2,\dots,\xi^n)$, $\dot{x}' = (\dot{x}^2,\dots,\dot{x}^n)$, $p' = (p_2,\dots,p_n)$ и т.д.

Имеем

$$p(\xi) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(1,\xi'), \tag{7}$$

(зависимость от x несущественна, и мы будем ее опускать). Более подробно,

$$p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}(1,\xi'), \tag{8}$$

$$p_1 = L(1,\xi') - \sum_{j=2}^{n} \xi^j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}(1,\xi'), \tag{9}$$

(равенство (9) вытекает из тождества Эйлера). Требование максимальной невырожденности означает, что ранг матрицы

$$\frac{\partial p}{\partial \xi'} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^1\, \partial \dot{x}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^1\, \partial \dot{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^n\, \partial \dot{x}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^n\, \partial \dot{x}^n} \end{pmatrix} \tag{10}$$

максимален, то есть равен $n-1$. Первая строка матрицы (10) является в силу тождества Эйлера линейной комбинацией остальных,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^1\, \partial \dot{x}^i} = -\sum_{j=2}^{n} \dot{x}^j\, \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j\, \partial \dot{x}^i}. \tag{11}$$

Следовательно, минор, состоящий из остальных строк матрицы (10), отличен от 0, и, по теореме о неявной функции, система уравнений

$$p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}(x,1,\xi') \tag{12}$$

(локально) разрешима относительно ξ'. Обозначим ее решение через

$$\xi' = \xi'(x,p'). \tag{13}$$

Система всех уравнений Эйлера, кроме 1-го, эквивалентна системе

$$
\begin{cases}
\dot{p}' = \dfrac{\partial L}{\partial x'}(x, 1, \xi', (x, p')), \\
\dot{x}' = \xi'(x, p'), \\
\dot{x}^1 = 1.
\end{cases}
\tag{14}
$$

Начальные условия для системы (14) (задача Коши) ставятся в виде

$$
x(0) = x_0, \quad \dot{p} = p_0' \tag{15}
$$

или, эквивалентно,

$$
x(0) = x_0, \quad \dot{x}\,(0)\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{R}_+) = \dot{x}_0^{*}\,. \tag{16}
$$

Первое уравнение Эйлера является следствием остальных в силу тождества Эйлера. Действительно,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\right) &= \frac{d}{dt}\left(L - \sum_{j=2}^{n} \dot{x}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \ddot{x}'\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} - \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) \\
&= \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} - \dot{x}'\frac{\partial L}{\partial x'} + \ddot{x}_1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{x}_1\frac{\partial L}{\partial x_1} + \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

при $\dot{x}_1 = 1$.

При условии максимальности ранга матрицы (10) только одно из уравнений является следствием остальных, остальные же независимы.

Причина вырожденности системы уравнений Эйлера, конечно же, заключается в независимости от параметризации: если $x(t)$ — экстремаль, и $t(\tau)$ — гладкая замена переменной, то $x(t(\tau))$ — также экстремаль. Для выделения однозначного решения следует каким-либо образом фиксировать параметризацию, например, потребовать, чтобы $\dot{x}^1 = 1$, как выше (это локальный способ фиксации параметризации), или $|\,\dot{x}\,| = 1$ (такой способ является глобальным). Предположим, что выполнено дополнительное условие:

$$
L(x, \dot{x}) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{18}
$$

Тогда параметризацию можно фиксировать условием

$$
L(x, \dot{x}) = 1, \tag{19}
$$

(финслерова длина дуги).

2. Геодезическое покрытие. Фиксируем точку A и построим семейство $x = x(t, \alpha)$ экстремалей, выходящих из точки A:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \tag{20}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha, \tag{21}$$

$$\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n).$$

$t \in [0, 1]$ (см. рис. 1.1).

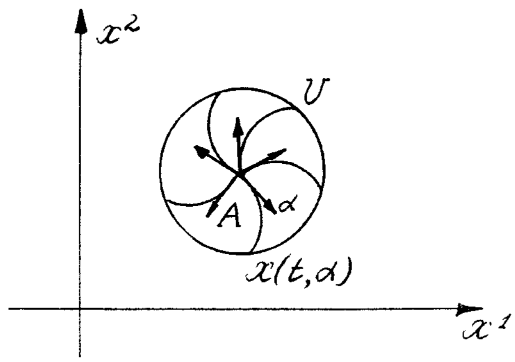

Рис. 5.1.

В силу однородности, очевидно,

$$x(t, \alpha) = x\left(\lambda t, \frac{\alpha}{\lambda}\right) \tag{22}$$

для любого $\lambda > 0$.

Как уже было сказано выше, одна и та же траектория уравнения Эйлера может определяться (с точностью до параметризации) различными значениями α. Более точно, это имеет место для $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$. При этом для правильной формулировки понятия кратности покрытия можно использовать два способа. Во-первых, можно наложить условие $|\alpha| = 1$ (см. выше), и тогда однократность покрытия будет означать, что (t, α) являются "сферическими координатами" вблизи точки x_0. Можно также (используя однородность) считать α произвольным и рассматривать все траектории при $t \in [0, 1]$. Именно этот способ и принят ниже. Итак,

Определение 1.1 Покрытие называется *однократным*, если отображение

$$\alpha \mapsto x(1, \alpha)$$

является диффеоморфизмом при $|\alpha| \le \varepsilon$ достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Теорема 1.2 *Покрытие* (20)–(21) *является однократным.*

Доказательство. Имеем

$$x(t, \alpha) = x(0, \alpha) + t\,\dot{x}(0, \alpha) + O(t^2) = x_0 + \alpha t + O(t^2), \tag{23}$$

причем оценка $O(t^2)$ равномерна по α при $|\alpha| \le 1$. Далее, в силу (22)–(23)

$$x(1, \alpha) = x\left(|\alpha|, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right) = x_0 + \alpha + O(|\alpha|^2). \tag{24}$$

Следовательно,

$$\left[\det\frac{\partial x(1,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}=1 \tag{25}$$

и при достаточно малых $|\alpha|$ отображение $\alpha\mapsto x(1,\alpha)$ является диффеоморфизмом.

3. Действие и инвариантный интеграл Гильберта.

Определение 1.3 *Действием* называется функция

$$S(x)=I[\gamma(x)], \tag{26}$$

где $\gamma(x)$ — экстремаль, соединяющая точки $A(x_0)$ и x.

Действие определено там, где покрытие является однократным (то есть по крайней мере, в окрестности точки x) и в терминах покрытия может быть записано в виде

$$S(x(1,\alpha))=\int_0^1 L(x(t,\alpha),\dot{x}\,(t,\alpha))\,dt. \tag{27}$$

В формуле (27) интегрирование производится по экстремалям. Предъявим выражение для S, в котором интегрирование может производиться по произвольной кривой, соединяющей точки x_0 и x (инвариантный интеграл Гильберта). Для этого продифференцируем обе части равенства (27) по α. Получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} &= \int_0^1\left[\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}\frac{\partial\,\dot{x}}{\partial\alpha}\right]dt \\
&\qquad\text{(интегрируем по частям 2-ое слагаемое)} \\
&= \int_0^1\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}dt+\left.\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_0^1 \\
&\qquad\text{(в силу уравнений Эйлера)} \\
&= \left.\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}\;\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_0^1=\left.\frac{\partial L}{\partial\,\dot{x}}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_{t=1},
\end{aligned} \tag{28}$$

поскольку

$$\left.\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_{t=0}=\frac{\partial x_0}{\partial\alpha}=0.$$

Матрица

$$\frac{\partial x(1,\alpha)}{\partial\alpha}$$

невырождена, поэтому из (28) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x(1,\alpha)) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(1,\alpha), \dot{x}(1,\alpha)). \tag{29}$$

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ — решение уравнения $x = x(1,\alpha)$. Обозначим

$$\xi(x) = \dot{x}(1, \alpha(x)). \tag{30}$$

Функция $\xi(x)$ называется *геодезическим наклоном*. Поскольку экстремали определены с точностью до перепараметризации, геодезический наклон однозначен лишь с точностью до умножения на положительные числа, то есть определен однозначно лишь класс $\mathrm{cls}\,(\xi(x), \mathbf{R}_+)$. Из (29), (30) имеем

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \xi(x)), \tag{31}$$

и, таким образом,

$$S(x) = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \xi(x))\, dx, \tag{32}$$

где интеграл берется по любой кривой γ, соединяющей точки x_0 и x. Интеграл (32) называется *интегралом Гильберта*.

Инвариантность интеграла Гильберта, как мы видели, вытекает из уравнений Эйлера. Обратно, пусть нам удалось найти такую вектор-функцию $\xi(x)$, что интеграл Гильберта инвариантен. Тогда решение уравнения

$$\dot{x} = \xi(x)$$

— экстремали. Докажем это. Действительно, инвариантность интеграла означает, что коэффициенты подынтегральной формы удовлетворяют условию Фробениуса (равенство смешанных производных),

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right), \tag{33}$$

то есть

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j\, \partial \dot{x}^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\, \partial x^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}. \tag{34}$$

Умножим (34) на $\dot{x}^j = \xi^j(x)$ и просуммируем по j. Получим

$$\dot{x}^j\, \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} + \dot{x}^j\, \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j\, \partial \dot{x}^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = \dot{x}^j\, \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\, \dot{x}^j\,. \tag{35}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\dot{x}^j = \ddot{x}^k \tag{36}$$

и тождеством Эйлера для однородных функций, получим из (35) уравнения Эйлера (3).

4. Условия Лежандра и достаточные условия минимума. Пусть $\gamma = \{x(t)\}$ — экстремаль, $\tilde{\gamma} = \{\tilde{x}(t)\}$ — произвольная кривая в U с теми же концами. Будем считать, что $L > 0$ при $\dot{x} \neq 0$ и что в качестве параметра t на $\tilde{\gamma}$ выбрана финслерова длина дуги, а $I[\gamma]$ выражен через инвариантный интеграл Гильберта по $\tilde{\gamma}$. Тогда

$$\begin{aligned} I(\tilde{\gamma}) - I(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\tilde{x}}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\tilde{x}(t), \xi(\tilde{x}(t)))\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\xi(\tilde{x}(t)) - \dot{\tilde{x}}(t)) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\tilde{x}(t), \xi(\tilde{x}(t)))\, dt. \end{aligned} \tag{37}$$

Для неотрицательности интеграла (37) достаточно потребовать, чтобы

$$(\xi - \dot{\tilde{x}}) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \neq \dot{\tilde{x}}. \tag{38}$$

Геометрически это условие означает, что кривая $\{L = 1\}$ лежит по одну сторону от своей касательной в точке $\xi(\tilde{x})$ (см. рис. 1.2). Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось *условие Лежандра* — кривая $\{\dot{x} \mid L(x, \dot{x}) = 1\}$ (фигуратриса) выпукла.

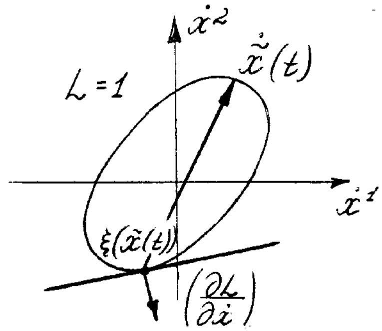

Рис. 5.2.

5. Гамильтонова интерпретация.
Рассмотрим лагранжево многообразие

$$\mathcal{L} = \left\{ (x,p) \,|\, p = \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right\}. \qquad (39)$$

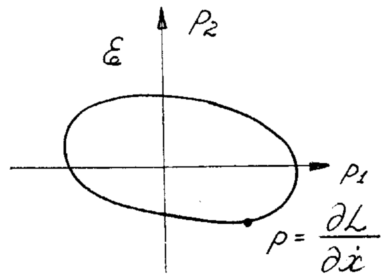

Рис. 5.3.

Очевидно,

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{E} = l(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_{*\xi}), \qquad (40)$$

поскольку

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

(см. (31)).

Множество $\mathcal{E}$ называется *индикатрисой* (см. рис. 1.3), а переход от фигуратрисы к индикатрисе есть преобразование полюсов и поляр ($p = \partial L/\partial \dot{x}$ — параметры касательных плоскостей к фигуратрисе).

Выясним, каково в данном случае понятие *гамильтониана*: ответ на этот вопрос нетривиален, поскольку

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} = 0.$$

Оказывается, в качестве гамильтониана можно выбрать произвольную функцию $H(x,p)$ положительно однородную степени 1 по p и такую, что

$$H(x,p)|_{\mathcal{E}} = C, \quad H_p(x,p)|_{\mathcal{E}} \neq 0. \qquad (41)$$

Равным образом в качестве $H(x,p)$ можно выбрать любую образующую идеала в пространстве положительно однородных гладких функций, состоящего из функций, обращающихся в 0 на $\mathcal{E}$.

Локально можно построить гамильтониан $H_i(x,p)$, фиксировав $\dot{x}^i = 1$. Например, при $i = 1$ можно взять

$$H_1(x,p) = p_1 + \xi'(x,p)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}(x, 1, \xi'(x,p')) - L(x, 1, \xi'(x,p')) \qquad (42)$$

(см. (14)); заметим, что локальные гамильтонианы $H_i(x,p)$ совпадают лишь с точностью до множителя.

Теорема 1.4 *Если $H(x,p)$ — допустимый (то есть удовлетворяющий условию (41)) гамильтониан, то решение соответствующей системы Гамильтона суть экстремали.*

Доказательство.

1) Пусть $H(x,p)$, $H'(x,p)$ — допустимые гамильтонианы. Тогда соответствующие гамильтоновы векторные поля отличаются на $\mathcal{E}$ на скалярный множитель. Действительно, имеем в окрестности $\mathcal{E}$

$$H'(x,p) = Q(x,p) \cdot H(x,p), \quad Q|_{\mathcal{E}} \neq 0 \tag{43}$$

и

$$\left.(H'_p - H'_x)\right|_{\mathcal{E}} = (QH_p + Q_pH, -QH_x - Q_xH)|_{\mathcal{E}} = Q(H_p, -H_x)|_{\mathcal{E}}\,. \tag{44}$$

Таким образом, решения систем Гамильтона для H и H' отличаются только параметризацией, и выбор допустимого гамильтониана означает фиксацию параметризации.

2) Поскольку экстремаль не зависит от параметризации, утверждение достаточно проверить локально.

Упражнение 1.5 Используя гамильтониан $H_i(x,p)$, свести задачу к непараметрическому случаю.