# 1 Обобщенные кривые и вариационное исчисление

Примеры, приводящие к понятию обобщенных решений. Задача Максвелла. Навигационная задача Цермело. Аналитический пример. Обобщенные функции (основные определения). Обобщенные кривые. Границы обобщенных кривых. Постановка обобщенной задачи вариационного исчисления. Заключительные замечания.

В данной (заключительной) лекции мы рассмотрим вопрос о том, каким образом следует модифицировать постановку задачи вариационного исчисления для функционалов, не удовлетворяющих условию Лежандра. Для этого вначале будут рассмотрены три примера задач вариационного исчисления, из которых две первые являются классическими. Для того, чтобы не загромождать изложения излишними техническими подробностями, мы опускаем аналитические формулы в первых двух задачах, рассматривая их лишь эвристически. Третий пример представляет собой разбор вариационной задачи для простейшего (непараметрического) лагранжиана, учитывающий уже все аналитические детали.

Рассмотрение этих примеров приводит нас к необходимости введения понятия *обобщенных решений* задач вариационного исчисления — решений, являющихся так называемыми обобщенными кривыми. Теория обобщенных кривых строится параллельно с теорией обобщенных функций (распределений), и, для замкнутости изложения, мы приводим основные определения этой последней теории. Далее будут приведены основные определения теории обобщенных кривых и дана формулировка обобщенной задачи вариационного исчисления.

Отметим здесь, что целью этой лекции является не подробный разбор всех определений и доказательств, связанных с обобщенными решениями задач вариационного исчисления, а лишь показ возможных направлений дальнейшего развития теории. Поэтому мы опускаем доказательства сформулированных утверждений и стремимся лишь дать общее понятие о теории обобщенных решений.

**1. Задача Максвелла.** В качестве *первого примера* рассмотрим *задачу Максвелла о нахождении наилучшего пути при подъеме на гору*. Задача состоит в том, чтобы для двух точек $A$ и $B$, расположенных на горе, из которых точка $A$ лежит ниже точки $B$, найти путь, движение по которому из $A$ в $B$ достигается за минимальное время. Опуская аналитические подробности, заметим, что движение по слишком пологому пути сильно удлиняет этот путь, не приводя к существенному увеличению скорости движения, в то время, как движение по слишком крутому пути приводит к увеличению времени за счет резкого уменьшения скорости движения. Очевидно теперь, что существует оптимальная скорость набора высоты, не приводящая, с одной стороны, к резкому увеличению длины пути и, с другой стороны, к резкому уменьшению скорости движения. Эту скорость набора высоты можно также охарактеризовать углом между направлением движения и горизонталью (для заданного наклона горы в данной точке). Таким образом, оптимальное решение в случае конической горы


Рис. 1:

выглядит как обвивающая эту гору спираль с постоянным наклоном (см. рис. 1, коническая гора).

Далее, для случая выпуклой горы (см. рис. 1, выпуклая гора) Максвелл нашел следующее решение: нужно придерживаться пути, который будет обвивать гору с оптимальным наклоном до тех пор, пока местность не выровняется настолько, чтобы остаток пути можно было пройти по геодезической до точки $B$. Заметим однако, что в многоэкстремальном случае (рис. 1, горный хребет) такая процедура может привести не на ту вершину.

Отметим теперь, что *если в качестве решения задачи мы допускаем ломаные экстремали*, то у задачи появляются и другие решения, отличные от описанных выше. Для построения таких решений следует провести геодезическую от $A$ к $B$ в качестве траектории выбирать зигзаг оптимального наклона, расположенный вблизи этой геодезической (рис. 1.2).

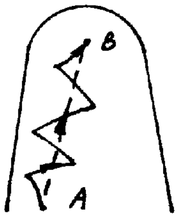


Рис. 12.2.

Такое решение обычно выбирают строители горных дорог, заменяя точки излома траектории крутыми поворотами. Отметим также, что такие решения устраняют неоднозначность примера, изображенного на рис. 1.3. Заметим, что *решения описанного вида не единственны* (мы можем брать сколь угодно мелкий зигзаг).

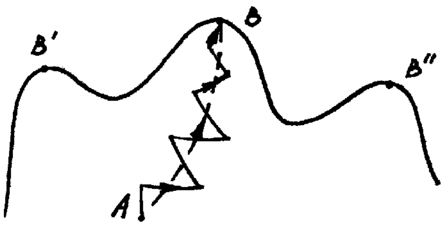


Рис. 12.3.

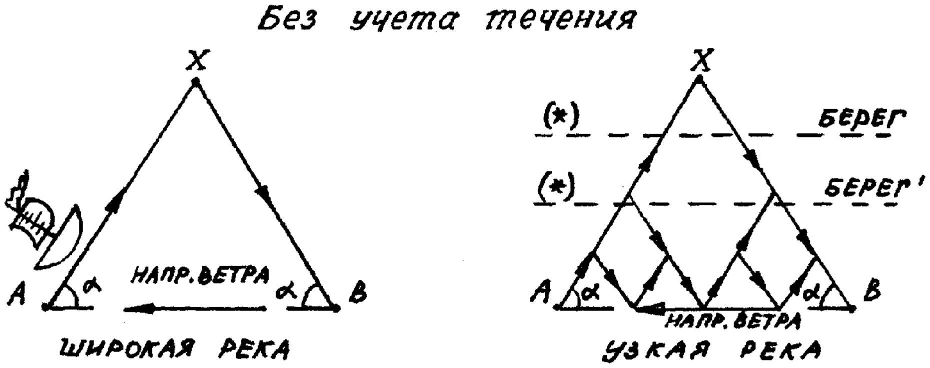


Рис. 5:

**2. Задача Цермело.** В качестве *второго примера* рассмотрим частный случай так называемой *навигационной задачи Цермело*. Задача состоит в том, чтобы проплыть на парусном судне против ветра от точки $A$ до точки $B$, где $A$ и $B$ находятся посередине реки, причем $B$ ниже по течению.

Вначале проанализируем эту задачу, не учитывая скорость течения. При движении против ветра применяется известный способ (движение галсами). При этом в каждый момент направление ветра, направление движения и ориентация паруса соотносятся друг с другом так, как это показано на рис. 1.4.

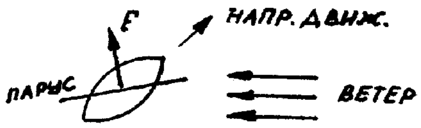


Рис. 12.4.

Очевидно, что при слишком малом угле атаки $\alpha$ скорость движения будет весьма мала за счет уменьшения компоненты силы в направлении движения, а при слишком большом угле $\alpha$ увеличивается путь. Таким образом, как и в предыдущем примере, существует некоторый оптимальный угол атаки $\alpha$. Траектория движения для достаточно широкой реки показана на рис. 5 (слева, ломаная $AXB$). В случае же более узкой реки придется выбирать траекторию с большим количеством точек смены галса. Однако, эти траектории годятся и для случая широкой реки — и мы снова приходим к тому, что решение не является единственным.

Проведем теперь анализ решения задачи с учетом течения реки (рис. 1.6). Предположим (как это обычно и бывает на практике), что скорость течения максимальна в середине реки и убывает к краям. Тогда из решений предыдущей задачи наиболее выгодными будут те, которые наименее отклоняются от середины реки. Однако (если не учитывать время, требующееся на изменение галса) зигзаг можно делать сколь угодно мелким, все время уменьшая при этом время пути.

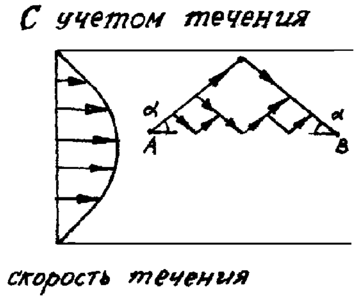


Рис. 12.6.

Таким образом, в этом случае *задача не имеет оптимального решения даже в классе ломаных экстремалей.*

Из проведенного анализа видно, что причиной несуществования решения последней задачи является незамкнутость рассматриваемого множества кривых: мы имеем оптимизирующую последовательность кривых со все более мелким зигзагом, но не имеем ее предела, который можно было бы назвать "бесконечно-мелким зигзагом". Выходом из этого положения является присоединение к рассматриваемому классу кривых "обобщенных элементов" (обобщенных кривых), в числе которых был бы и описанный выше "бесконечно-мелкий зигзаг".

Отметим также и необходимость учета ограничений ("берег" в задаче Цермело), которые приводят к появлению дополнительных точек излома; такая ситуация характерна для задач оптимального управления. Заметим еще, что лыжник, взбирающийся на гору "елочкой" в определенном смысле реализует обобщенное решение. В каждой точке его путь имеет два направления (направление правой и левой лыж) это не то же самое, что двигаться вертикально вверх обеими лыжами (см. рис. 1.7).

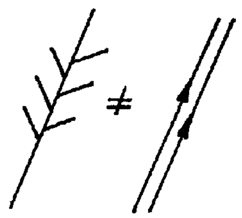

Рис. 12.7.

**3. Третий пример** является примером конкретной задачи вариационного исчисления, аналитически иллюстрирующей эвристические соображения, высказанные выше. Рассмотрим непараметрический функционал

$$I[x(t)] = \int_0^1 (1 + x^2)[1 + (\dot{x}^2 - 1)^2]\, dt \qquad (1)$$

(условие Лежандра $\partial^2 L/\partial \dot{x}^2 > 0$ не выполнено!).

Будем решать задачу нахождения минимума функционала (1) при условиях закрепленных концов

$$x(0) = x(1) = 0. \qquad (2)$$

Очевидно, что функционал (1) ограничен снизу:

$$I[x(t)] \geq \int_0^1 dt = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\inf I[x(t)] \geq 1.$$

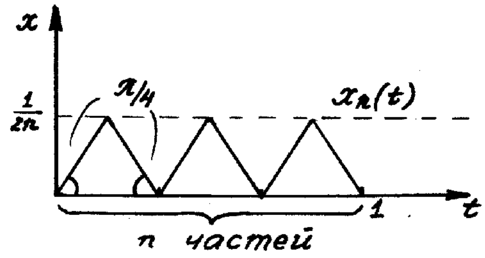


Рис. 12.8.

Мы покажем, что в последнем соотношении имеет место равенство, построив минимизирующую последовательность. График элемента $x_n(t)$ минимизирующей последовательности изображен на рис. 1.8.

Имеем, очевидно,

$$I[x_n(t)] = (\text{ т.к. } \dot{x}_n = \pm 1) = \int_0^1 (1 + x_n^2(t))\, dt \leq \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)\, dt = 1 + \frac{1}{4n^2} \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

Однако, предел такой минимизирующей последовательности не существует — пределом должен был бы быть упомянутый выше "бесконечно-мелкий зигзиг". Кажущийся же с первого взгляда очевидным предел $x_0(t) \equiv 0$ не реализует минимума, так как

$$I[x_0(t)] = \int_0^1 2\, dt = 2\,(!)$$

Образно "бесконечно-мелкий зигзаг" можно описать как (обобщенную) кривую, которая идет вдоль оси $Ot$ и имеет пару наклонов $\pm 1$, вес (вероятность) каждого из которых равен $0,5$. Такую кривую можно было бы сравнить с траекторией движения частицы жидкости в случае наличия турбулентности.

**4. Отступление. Обобщенные функции**. Для того, чтобы дать определения обобщенной кривой, мы вначале напомним определение обобщенных функций (распределений) в смысле Шварца (см. [ГеШи]).

Рассмотрим вначале непрерывную функцию $y = f(x)$ на прямой $\mathbf{R}^1$. Выбрав некоторое линейное пространство $\mathcal{D}$ функций на прямой (в качестве такого пространства можно выбрать, например, пространство $C_0(\mathbf{R}^1)$ непрерывных функций с компактным носителем, пространство $C_0^k(\mathbf{R}^1)$ $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем или, что наиболее употребительно, пространство $C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ бесконечно-дифференцируемых функций с компактным носителем), мы можем сопоставить каждой непрерывной функции $f(x)$ функционал $T_f$ на этом пространстве по формуле

$$T_f(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x) \in D. \tag{3}$$

Элементы пространства $\mathcal{D}$ мы будем называть *пробными функциями*; для простоты мы здесь рассмотрим $\mathcal{D} = C_0(\mathbf{R}^1)$. Последовательность $\varphi_n(x)$ пробных функций будет называться *сходящейся* к функции $\varphi(x)$, если:

а) существует такое число $R$ (общее для всех элементов $\varphi_n$ последовательности), что носители supp $\varphi_n$ всех функций $\varphi_n$ лежат на отрезке $[-R, R]$;

б) числовая последовательность $\alpha_n = \sup\limits_{[\infty,\infty]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$ стремится к нулю.

Очевидно, предельная функция $\varphi(x)$ принадлежит также $C_0(\mathbf{R}^1)$ (проверьте!)

Справедливы следующие утверждения.

**Предложение 1.1**

$$T_f : C_0(\mathbf{R}^1) \to \mathbf{R}$$

*— непрерывный линейный функционал.*

*Это означает, что*

$$T_f(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda T_f(\varphi_1) + \mu T_f(\varphi_2)$$

*для любых пробных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и для любой последовательности пробных функций $\varphi_n(x)$, сходящейся к функции $\varphi(x)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi).$$

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения.

**Предложение 1.2** *Функция $f(x)$ однозначно определяется функционалом $T_f$.*

Это означает, что если для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ функционалы $T_{f_1}$ и $T_{f_2}$ совпадают, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$. Фактически, предложение 1.2 представляет собой переформулировку известной леммы Дю–Буа–Реймонда, мы дадим здесь краткий набросок доказательства.

Предположим, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не совпадают тождественно; это значит, что существует такая точка $x_0$, в которой

$$f_1(x_0) - f_2(x_0) \neq 0.$$

Обозначим

$$f = f_1 - f_2$$

и предположим, для определенности, что $f(x_0) > 0$. Тогда существует такое число $\delta > 0$ и такая окрестность $U$ точки $x_0$, что

$$f(x) \geq \delta \quad \text{при} \quad x \in U. \tag{4}$$

Взяв в качестве $\varphi(x)$ пробную функцию, график которой изображен на рис. 1.9, имеем, в силу неравенства (4)

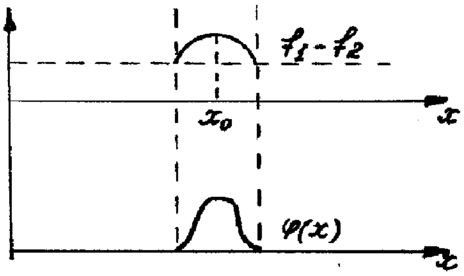


Рис. 12.9.

$$T_{f_1}(\varphi) - T_{f_2}(\varphi) = T_f(\varphi)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_U f(x)\,\varphi(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx > 0$$

в противоречии с тем, что $T_{f_1}(\varphi) = T_{f_2}(\varphi)$ для любой пробной функции $\varphi$.

Таким образом, *непрерывную функцию $f$ можно однозначно охарактеризовать непрерывным функционалом $T_f$*. Однако, *не любой непрерывный функционал $T$ на пространстве пробных функций $D$ определяется некоторой непрерывной функцией $f$*! Примером функционала, не определяемого никакой непрерывной функцией служит функционал

$$T(\varphi) = \varphi(x_0) \tag{5}$$

для некоторой фиксированной точки $x_0$. Этот функционал непрерывен (проверьте!), однако если $T(\varphi) = T_f(\varphi)$ для некоторой непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

для любой пробной функции $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_0) = 0$; отсюда, аналогично предложению 1.2, следует, что $f(x) = 0$ во всех точках, кроме, может быть, точки $x_0$. Однако, так как $f(x)$ непрерывна, мы имеем $f(x) = 0$, что противоречит равенству (5), так как в этом случае

$$T(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

для *любой* пробной функции $\varphi$.

Следовательно, можно расширить запас функций с помощью следующего определения.

**Определение 1.3** *Обобщенной функцией* (*распределением*) называется линейный непрерывный функционал на пространстве пробных функций.

Разумеется, множество обобщенных функций зависит от выбранного пространства пробных функций. Примерами обобщенных функций могут служить регулярные обобщенные функции вида $T_f$, определенные непрерывными (или кусочно-непрерывными) функциями, $\delta$-функция Дирака $\delta_{x_0}(x)$, определенная соотношением (5) и многие другие.

Нам потребуется еще понятие сходимости обобщенных функций.

**Определение 1.4** Последовательность обобщенных функций $T_n$ *сходится* к обобщенной функции $T$, если для каждой пробной функции $\varphi$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

Например, последовательность обобщенных функций $T_{f_n}$, определенная последовательностью непрерывных функций $f_n(x)$ (график $f_n(x)$ изображен на рис. 1.10) сходится к $\delta$-функции Дирака $\delta_{x_0}(x)$ (докажите!):

$$\lim T_{f_n} = \delta_{x_0}(x).$$

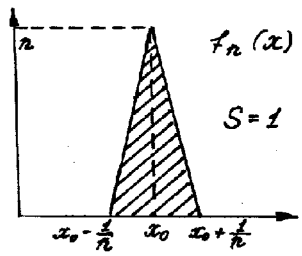


Рис. 12.10.

Заметим, что в качестве пространств пробных функций можно брать пространства функций, *не имеющих компактного носителя*; в этом случае, однако, функционалы $T_f(\varphi)$ определены не для любой непрерывной функции $f$, а только для непрерывной функции $f$ с компактным носителем. Возможны и другие варианты выбора пространств пробных функций. Аналогичные конструкции могут быть проведены также в пространстве $\mathbf{R}^n$.

**5. Обобщенные кривые.** Перейдем теперь к определению *обобщенных кривых*. Для задач вариационного исчисления необходимо учитывать не только точки кривой, но и направления кривой в ее точках. Поэтому мы должны считать, что в каждой точке кривая $l$

$$l:\ x = x(t) \tag{6}$$

задается своим *линейный элементом* $(x, \dot{x})$. Поэтому, следуя конструкции, приведшей нас выше к понятию распределения, мы должны выбирать пространство пробных функций как пространство функций, зависящих от переменных $(t, x, \dot{x})$ (здесь, разумеется, $x = (x^1, \dots, x^n)$; рассматривается для простоты непараметрический случай).

В качестве пространства пробных функций выберем пространство $C(\mathbf{R}^{2n+1})$ непрерывных функций от $2n+1$ независимой переменной $(t, x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. Элементы этого пространства будут обозначаться через

$$L(t, x, \dot{x}) = L.$$

Каждая (параметризованная) кривая (6) задает на пространстве пробных функций линейный непрерывный функционал

$$T_l(L) = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt. \qquad (7)$$

Отметим здесь, что выражение (7) — это тот самый функционал, который с самого начала рассматривался в вариационном исчислении; однако, ранее мы считали фиксированной функцию $L$ и в качестве аргумента рассматривали кривую $l$. Теперь же $l$ фиксирована, а аргументом функционала (7) является пробная функция (лагранжиан); при такой подходе выражение (7) становится линейным функционалом. Непрерывность этого функционала рассматривается относительно следующей сходимости пробных функций:

**Определение 1.5** последовательность $L_n$ пробных функций называется *сходящейся* к пробной функции $L$, если для каждого компакта $K$ в пространстве $\mathbf{R}^{2n+1}$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_K |L_n(t, x, \dot{x}) - L(t, x, \dot{x})| = 0.$$

Аналогично Предложениям 1.1 и 1.2 в случае обобщенных функций, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.6** *Для любой гладкой кривой $l$ функционал $T_l(L)$ является непрерывным функционалом на $C(\mathbf{R}^{2n+1})$. Этот функционал однозначно определяет кривую $l$.*

*Доказательство* предоставляется читателю в качестве упражнения.

Как и в случае обобщенных функций, не любой непрерывный линейных функционал на $C(\mathbf{R}^{2n+1})$ определяет гладкую кривую. Например, функционалы

$$T'(L) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} L(t, x, \dot{x})\, dt\, dx d\dot{x}, \qquad (8)$$

$$T''(L) = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}\{L(t, 0, 1) + L(t, 0, -1)\}\, dt, \qquad (9)$$

$$T'''(L) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} \mu(\dot{x}, t)\, L(t, x, \dot{x})\, d\dot{x} \right\} dt \qquad (10)$$

не определяют никакой гладкой кривой. В последнем примере $\mu(\dot{x}, t)$ — положительная непрерывная функция с компактным по $\dot{x}$ носителем. Однако, имеется принципиальное различие между случаями обобщенных функций и обобщенных кривых. Оно заключается в том, что любой непрерывный функционал над пространством $C_0(\mathbf{R}^1)$ непрерывных функций является пределом регулярных функционалов вида $T_f$, но не любой непрерывный функционал над пространством $C(\mathbf{R}^{2n+1})$ есть предел функционалов вида $T_l$, определяемых гладкими кривыми.

Так, например, функционал (8) не является пределом функционалов вида $T_l$; функционал (9) есть предел функционалов $T_{l_n}$, где кривые $l_n$ были определены в примере 3 (бесконечно-мелкий зигзаг), а функционал (10) есть (с небольшими оговорками), по существу, общий вид функционала, являющегося пределом функционалов вида $T_l$.

Функционалы вида (10) и представляют собой, по существу, обобщенные кривые. Эти кривые сосредоточены на обычной кривой $x = x(t)$, но имеют бесчисленное множество направлений $\dot{x}$, вес (вероятность) которых равна $\mu(\dot{x}, t)\, d\,\dot{x}$ (турбулентность).

Для придания точного смысла приведенным рассуждениям, нужно определить сходимость функционалов над $C(\mathbf{R}^{2n+1})$. Это делается так же, как и в случае обобщенных функций.

**Определение 1.7** Последовательность функционалов $T_n$ *сходится* к функционалу $T$, если для любой пробной функции $L$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} T_n(L) = T(L).$$

Естественным определением обобщенной кривой является следующее.

**Определение 1.8** *Обобщенной кривой* называется непрерывный линейный функционал $T$ в пространстве $C(\mathbf{R}^{2n+1})$, являющийся пределом функционалов вида $T_l$, определенных (кусочно-)гладкими кривыми.

**6. Граница обобщенной кривой.** Для того, чтобы поставить обобщенную задачу вариационного исчисления, нам осталось определить только понятие *границы обобщенной кривой*. Исходной формулой при этом определении является формула Ньютона–Лейбница, которую можно записать в следующем виде

$$\int_{t_1}^{t_2} d\varphi(t,x) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \dot{x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dt = \varphi(B) - \varphi(A), \tag{11}$$

где

$$l:\ x = x(t)$$

— кривая с началом в точке $A$ и концом в точке $B$,

$$d\varphi(t,x) = \frac{d\varphi}{dt}(t,x)dt$$

— полный дифференциал функции $\varphi$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \dot{x}\ \frac{d\varphi}{dx}$$

— полная производная этой функции по $t$. Формулу (11) можно записать в виде

$$T_l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = (\delta_B - \delta_A)(\varphi). \qquad (12)$$

Обобщенная функция $\delta_B - \delta_A$ однозначно определяется границей кривой ($A$ — начальная, а $B$ — конечная точка $l$) и однозначно определяет эту границу. Мы можем отождествить эту функцию с границей кривой $l$; таким образом, граница обычной кривой $l$ — это обобщенная функция $\delta_B - \delta_A$, если началом $l$ служит точка $A$, а концом — точка $B$. Это подсказывает следующее определение.

**Определение 1.9** Пусть $T$ — обобщенная кривая. *Границей* $\partial T$ этой обобщенной кривой называется обобщенная функция в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$, заданная соотношением

$$\partial T(\varphi) = T\left(\frac{d\varphi}{dt}\right). \qquad (13)$$

**7.** Теперь мы можем сформулировать *обобщенную задачу вариационного исчисления*.

Пусть заданы следующие объекты:

1) Лагранжиан (пробная функция) $L(t, x, \dot{x})$;
2) Множество $B$ обобщенных функций (границ).

Требуется найти такую обобщенную кривую $T_0$, что
а) граница кривой $T_0$ принадлежала множеству $B$:

$$\partial T_0 \in B;$$

б) для любой обобщенной кривой $T$, граница $\partial T$ которой лежит в $B : \partial T \in B$ имеет место неравенство

$$T_0(L) \leq T(L).$$

Заметим, что все рассмотренные задачи $1 - 3$ имеют обобщенное решение.

**8. Заключительные замечания.**

*Во-первых*, можно доказать, что при весьма слабых предположениях *решение обобщенной задачи вариационного исчисления всегда существует*. Доказательство довольно легко проводится методами функционального анализа.

*Во-вторых*, рассматриваемая теория может быть построена для гораздо более широкого класса задач. Так, вовсе не обязательно рассматривать минимум только для величин специального вида $T(L)$; вместо этого можно взять любую (непрерывную в некотором смысле) функцию $\Phi(T)$ на множестве обобщенных кривых. Это позволяет *расширить класс рассматриваемых функционалов*.

Также не обязательно учитывать обобщенные кривые, удовлетворяющие граничным условиям $\partial T \in B$. Например, можно рассматривать обобщенные кривые $T$, для которых $T(L_1) = a$, где $a$ — заданная постоянная, а $L_1$ — заданная пробная функция (изопериметрическая задача). В этом случае теорема существования также будет выполнена почти автоматически.

*В-третьих*, обобщенные решения имеют большое значение, в частности, и тогда, когда уже известно, что классическое решение существует. Например, в задаче Максвелла о кратчайшем пути на вершину горы существует обобщенное решение, сосредоточенное на геодезической. Это решение можно аппроксимировать зигзагообразным путем и использовать практически. Вообще, любое *обобщенное решение $T$ представляет собой предел классических* приближенных решений $l_n$, $n = 1, 2, , \ldots$, а для практических целей вполне достаточно иметь такие приближенные решения. Эти приближенные решения сходятся не к “видимому” решению первоначальной задачи, а к, так сказать, “скрытому”, обобщенному, решению, которое имеет смысл только при обобщенной формулировке.