Римановы поверхности, листок 4

осень 2004

1. Пусть X — компактная риманова поверхность рода g; пусть $0 < d \leqslant g$ и D — эффективный дивизор степени g. Покажите, что для почти всех таких D имеем $\dim |D| = 0$.

2. Пусть X — гиперэллиптическая риманова поверхность, вложенная в $\mathbb{CP}^3$ в качестве одномерного комплексного многообразия. Покажите, что X не является трансверсальным пересечением двух (комплексных) поверхностей.

3. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^3$ — риманова поверхность рода 1, вложенная с помощью полной линейной системы $|D|$, где $\deg D = 4$. Покажите, что X содержится в двух различных квадриках. (Отсюда следует, что X является их пересечением.)

4. Пусть X — сфера с тремя ручками и $Y = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^6$ — шестимерный тор. Можно ли вложить X в Y таким образом, чтобы это вложение индуцировало изоморфизм групп $H_1(X, \mathbb{Z})$ и $H_1(Y, \mathbb{Z})$?

5. На компактной римановой поверхности X выбрано k различных точек $p_1, \ldots, p_k$; дано k чисел $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что на X существует мероморфная функция f, для которой $\mathrm{ord}_{p_i}(f) = m_i$ при всех $i \in [1; k]$ (на нули и полюсы функции f в остальных точках никаких условий не накладывается).

6. Пусть X — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g, представленная в виде двулистного накрытия $\mathbb{CP}^1$, разветвленного в $2g + 2$ точках. Укажите в явном виде дивизоры степени нуль на X, соответствующие точкам второго порядка на $J(X)$.