НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Краткое описание структурной теории алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Производным рядом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ряд

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \ldots$$

определяемый соотношениями: $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется разрешимой, если $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для некоторого n.

В любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует и единствен максимальный разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ (называемый радикалом). Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ не содержит разрешимых идеалов, отличных от 0.

Теорема Ли.

a) Любое неприводимое представление разрешимой алгебры Ли в конечномерном комплексном линейном пространстве одномерно.

b) В пространстве любого конечномерного комплексного представления разрешимой алгебры Ли существует одномерное инвариантное подпространство.

c) Любое комплексное представление разрешимой алгебры Ли приводится к треугольному виду.

Определение. Алгебра Ли называется полупростой, если ее радикал равен 0, т.е. она не содержит нетривиальных разрешимых идеалов.

Теорема Леви. Всякая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{l}$ своего радикала $\mathfrak{r}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ (подалгебры Леви).

Определение. Формой Картана-Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется билинейная форма на $\mathfrak{g}$, задаваемая формулой:

$$(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x \cdot \mathrm{ad}y).$$

Форма Картана-Киллинга является симметричной, $\mathfrak{g}$-инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$.

Критерий Картана. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Картана-Киллинга невырождена.

СТРОЕНИЕ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

Для каждой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существуют

- коммутативная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$,
- конечное подмножество $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ и
- элемент $e_\alpha \in \mathfrak{g}$ для каждого $\alpha \in \Delta$,

такие что,

1) $0 \notin \Delta$

2) $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ для любых $h \in \mathfrak{h}$ и $\alpha \in \Delta$

3) Если $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$

Подалгебра $\mathfrak{h}$ называется картановской подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$, число $r = \dim \mathfrak{h}$ — рангом $\mathfrak{g}$, множество Δ — системой корней $\mathfrak{g}$, элементы $\alpha \in \Delta$ — корнями, а подпространства $\mathfrak{g}_\alpha$ — корневыми подпространствами.

Ограничение формы Картана-Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено, в силу чего она устанавливает естественный изоморфизм между пространствами $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Посредством этого изоморфизма форма Картана-Киллинга может быть поднята на $\mathfrak{h}^*$.

Система корней Δ порождает $\mathfrak{h}^*$. Ограничение формы Картана-Киллинга на вещественную линейную оболочку множества Δ — подпространство $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ — положительно определено.

Для каждого корня $\alpha \in \Delta$ существует такой элемент $h_\alpha \in \mathfrak{h}$, что

$$\beta(h_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

для любого элемента $\beta \in \mathfrak{h}^*$.

Элементы $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ можно выбрать так, чтобы

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha; [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha; [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_{-\alpha}$$

СВОЙСТВА СИСТЕМЫ КОРНЕЙ Δ

- Если $\alpha, c\alpha \in \Delta (c \in \mathbb{C})$, то $c = 1$ или $c = -1$.
- Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$, если же $\alpha + \beta \notin \Delta$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$.

Произвольный линейный функционал f на пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, не обращающийся в 0 на корнях: $f(\alpha) \neq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$, определяет разбиение системы корней Δ на положительные и отрицательные корни:

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta | f(\alpha) > 0\} \text{ и } \Delta^- = \{\alpha \in \Delta | f(\alpha) < 0\}.$$

Ясно, что $\Delta^- = -\Delta^+$, $\Delta^- \cap \Delta^+ = 0$ и $\Delta = \Delta^- \cup \Delta^+$.

Множество Δ^+ содержит такое подмножество $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ (систему простых корней), что

- Σ является базисом в $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$
- $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ для любых $i \neq j$

- Любой положительный корень $\beta \in \Delta^+$ (соответственно отрицательный корень $\beta \in \Delta^-$) может быть представлен в виде $\beta = \sum m_i \alpha_i$, где m_i — целые неотрицательные (соответственно неположительные) числа.

- Для любых корней $\alpha, \beta \in \Delta$ число $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ является целым

- Набор чисел
$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \alpha_i(h_j)$$
составляет матрицу Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и определяет ее однозначно:

  $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли с образующими $e_1, \ldots, e_r$ ($e_i = e_{\alpha_i}$), $f_1, \ldots, f_r$ ($f_i = e_{-\alpha_i}$), $h_1, \ldots, h_r$ и соотношениями:
$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i,$$
$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j,$$
$$\mathrm{ad}(e_i)^{-a_{ji}+1}(e_j) = 0 \text{ и } \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ji}+1}(f_j) = 0 \text{ для любых } i \neq j$$

ТРЕУГОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Положим
$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ и } \mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$$
Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. При этом

- $\mathfrak{n}_+$ ($\mathfrak{n}_-$) является нильпотентной подалгеброй, порожденной элементами $e_1, \ldots, e_r$ ($f_1, \ldots, f_r$)

- для любого $x \in \mathfrak{n}_+$ ($x \in \mathfrak{n}_-$) оператор $\mathrm{ad}x$ является нильпотентным оператором в $\mathfrak{g}$.

- $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_-] = \mathfrak{n}_-$

- $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+)$

ГРУППА ВЕЙЛЯ

Для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}, \alpha \neq 0$, обозначим через s_α отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α:
$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Определение. Группой Вейля системы корней Δ называется группа W, порожденная отражениями $s_\alpha (\alpha \in \Delta)$.

Свойства группы Вейля:

- W конечна
- W порождена отражениями $s_{\alpha_i}(\alpha_i \in \Sigma)$.
- W сохраняет систему корней Δ
- W действует транзитивно на множестве систем простых корней
- $\det s_\alpha = -1$, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ для любого корня $\alpha \in \Delta$
- $s_{\alpha_i}(\Delta^+ \setminus \alpha_i) = (\Delta^+ \setminus \alpha_i)$ для любого простого корня $\alpha_i \in \Sigma$
- Если $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Delta^+} \beta$ — полусумма положительных корней, то для любого простого корня $\alpha_i \in \Sigma$ имеет место равенство $s_{\alpha_i}(\rho) = \rho - \alpha_i$. (В частности, отсюда следует важное равенство:

$$\rho(h_{\alpha_i}) = 1 \text{ для любого простого корня } \alpha_i \in \Sigma)$$

- Пусть $K = \{x \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \mid (\alpha_i, x) > 0 \text{ для любого } \alpha_i \in \Sigma\}$ (множество K называется камерой Вейля), а $\bar{K}$ — замыкание множества K. Тогда $\bar{K}$ является фундаментальной областью относительно действия группы Вейля в пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, точнее
  - для любого $x \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ найдется элемент $w \in W$, такой что $wx \in \bar{K}$;
  - если $x, wx \in \bar{K}$, то $x = wx$, если кроме того $x \in K$, то $w = id$