Лекция 6

Сохраняя обозначения, введенные перед формулировкой теоремы 2, положим $b' = b(1+\delta)$ и $\lambda = \sigma + i\tau$.

Теорема 3. *Пусть* $0 \le q < 1$. *Тогда достаточно большие по модулю* $\lambda = \sigma + i\tau$ *с* $|\tau| \ge b'|\sigma|^q$ *лежат в резольвентном множестве* $\rho(A)$. *При этом справедливы соотношения*

$$\|A_1 R_{A_0}(\lambda)\| \le \theta < 1, \tag{21}$$

$$R_A(\lambda) = R_{A_0}(\lambda)[I + A_1 R_{A_0}(\lambda)]^{-1}, \tag{22}$$

$$\|R_A(\lambda)\| \le (1-\theta)^{-1}\|R_{A_0}(\lambda)\|. \tag{23}$$

Таким образом, спектр оператора A лежит в объединении двух "параболических" областей

$$\{\lambda : |\tau| \le b'|\sigma|^q, \ \ \pm\sigma > 0\} \tag{24}$$

и некоторой окрестности начала, зависящей от выбора δ. Если $q = 0$, то (24) – горизонтальная полоса. Если оператор A_0 полуограничен снизу, то остается только правая область. Эти результаты, конечно, сильнее, чем в случае, когда известно только, что оператор A_1 компактен относительно A_0. Случай $q < 0$ будет рассмотрен в теоремах 4 и 5.

Доказательство теоремы проведем для положительного оператора A_0, ее перенесение на общий случай не вызывает труда. Положим $\lambda - \lambda_j = t$ и заметим, что при фиксированном λ

$$\sup_j \lambda_j^q |\lambda_j - \lambda|^{-1} \le \sup_{t \ge d(\lambda)} (|\lambda| + t)^q t^{-1} \le \sup_{t \ge |\tau|} (|\lambda| + t)^q t^{-1}. \tag{25}$$

Дискретный параметр λ_j заменен здесь непрерывным параметром t. Функция $(|\lambda| + t)^q t^{-1}$, как легко проверить, имеет отрицательную производную по t, поэтому получаем

$$\|A_1 R_{A_0}(\lambda)\| \le b\,\frac{(|\lambda| + \tau)^q}{\tau}. \tag{26}$$

Функция $[\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} + \tau]^q \tau^{-1}$ имеет отрицательную производную по τ, поэтому рассмотрим ее при $\tau = b'\sigma^q$. Для этих τ правая часть в (26) имеет предел b/b' при $\sigma \to \infty$, поэтому доказываемое утверждение верно с любым θ, лежащим строго между b/b' и 1. $\square$

Перейдем к случаю $q < 0$. Так как предыдущие результаты применимы с $q = 0$, то собственные значения оператора A заведомо лежат внутри достаточно широкой полосы

$$\{\lambda : |\tau| \le C\}. \tag{27}$$

Теорема 4. *Пусть* $q < 0$. *Тогда при достаточно больших* $|\sigma|$

$$\|A_0^q R_{A_0}(\lambda)\| \le C(q) \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{\sigma^q}{|\tau|}\right). \tag{28}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Доказательство снова проведем для оператора с положительными собственными значениями. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \frac{t^{2q}}{(t-\sigma)^2+\tau^2}, \quad t \geq \lambda_1. \tag{29}$$

При $t = \lambda_j$ это квадрат модуля собственного значения оператора $A_0^q R_{A_0}(\lambda)$. Ее производная имеет вид

$$\Phi'(t) = \frac{2t^{2q-1}}{[(t-\sigma)^2+\tau^2]^2}\Psi(t), \text{ где } \Psi(t) = q[(t-\sigma)^2+\tau^2] - t(t-\sigma).$$

Квадратный трехчлен $\Psi(t)$ имеет корни

$$t_\pm = \sigma\frac{1-2q}{2-2q} \pm \frac{[\sigma^2 - 4q(q-1)\tau^2]^{1/2}}{2-2q}.$$

При больших σ их два, причем

$$C'\sigma < t_+ < \sigma, \text{ где } C' = (1-2q)(2-2q)^{-1}. \tag{30}$$

Правее t_+ и левее t_- производная $\Phi'(t)$ отрицательна. Поэтому $\Phi(t)$ достигает верхней грани своих значений при $t = t_+$ или $t = \lambda_1$. Это приводит к (28). □

Теорема 5. *Пусть $q < 0$, $0 < \theta < 1$ и выполнено условие (27). Положим $b' = b\theta^{-1}C(q)$. Тогда все точки λ с достаточно большими σ и $|\tau| \geq b'|\sigma|^q$ лежат в $\rho(A)$ и при этом выполняются соотношения (21) – (23).*

Это простое следствие предыдущей теоремы. Спектр оператора A опять лежит в объединении областей (24) с некоторой окрестностью начала, причем остается только правая область, если оператор A_0 полуограничен снизу. Но теперь эти области скорее надо называть "гиперболическими".

Замечание. В абстрактной теории несамосопряженных операторов иногда, чтобы не терять общность, рассматривают слабые возмущения нормальных операторов с дискретным спектром, содержащимся в нескольких лучах, выходящих из начала. Пример такого оператора легко строится: возьмем матричный оператор, получаемый умножением скалярного самосопряженного оператора с дискретным спектром на числовую диагональную матрицу, в которой диагональные элементы имеют разные аргументы. Однако естественных примеров в теории уравнений в частных производных не видно, поэтому мы ограничиваемся рассмотрением слабых возмущений самосопряженных операторов.

6. Совпадение размерностей инвариантных подпространств

Лемма (Б.-С. Надь.) *Пусть P и Q – два проектора, и пусть $\|P - Q\| < 1$. Тогда проекторы P и Q имеют одинаковую размерность. Иначе говоря, подпространства PH и QH имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Так как $\|P-Q\|<1$, то оператор $I-(P-Q)$ обратим и

$$[I-(P-Q)]H=H, \text{ так что } PQH=PH.$$

Значит, P отображает QH на PH. Это отображение взаимно однозначно и непрерывно, так как при $f\in QH$

$$\|Pf\|=\|(I-Q+P)f\|\geq(1-\|Q-P\|)\|f\|.$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. □

Следствие 1. *Пусть* $\{P(t)\}$ $(0\leq t\leq 1)$ *– семейство проекторов, непрерывно зависящих от* t *в смысле нормы в* H: $\|P(t)-P(t')\|\to 0$ *при* $t'\to t$. *Тогда размерность подпространства* $P(t)H$ *не зависит от* t.

Следствие 2. *Пусть* $\{A(t)\}$ $(0\leq t\leq 1)$ *– семейство операторов с компактной резольвентой и* Γ *– замкнутый контур, на котором нет собственных значений этих операторов. Рассмотрим проекторы Рисса*

$$P_t(\Gamma)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_{A(t)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{1}$$

Предположим, что резольвента $R_{A(t)}(\lambda)$ *непрерывно зависит от* t *по норме равномерно по* λ *на* Γ. *Тогда размерность подпространства* $P_t(\Gamma)H$ *не зависит от* t.

Действительно,

$$\|P_t(\Gamma)-P_{t'}(\Gamma)\|\leq(2\pi)^{-1}\max_{\lambda\in\Gamma}\|R_{A(t)}(\lambda)-R_{A(t')}(\lambda)\||\Gamma|,$$

где $|\Gamma|$ – длина контура Γ.

Пусть $A_0=A_0^*$ и $A=A_0+A_1$ – операторы с компактной резольвентой и Γ – замкнутый контур, не проходящий через их собственные значения. Рассмотрим проекторы Рисса

$$P_{A_0}(\Gamma)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_{A_0}(\lambda)\,d\lambda \quad \text{и} \quad P_A(\Gamma)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(\lambda)\,d\lambda. \tag{2}$$

Напомним, что подпространство $P_{A_0}(\Gamma)H$ инвариантно относительно A_0 и натянуто на собственные векторы этого оператора, отвечающие его собственным значениям, лежащим внутри ограниченной области Ω с границей Γ. Аналогично подпространство $P_A(\Gamma)H$ инвариантно относительно A и натянуто на корневые векторы этого оператора, отвечающие его собственным значениям, лежащим внутри Ω.

Теорема. *Пусть* $\|A_1R_{A_0}(\lambda)\|\leq\theta<1$ *на* Γ. *Тогда подпространства* $P_A(\Gamma)H$ *и* $P_{A_0}(\Gamma)H$ *имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Рассмотрим операторы $A(t)=A_0+tA_1$, $0\leq t\leq 1$. Мы имеем

$$A(t)-\lambda I=[I+tA_1R_{A_0}(\lambda)](A_0-\lambda I),$$

и на контуре Γ существует

$$R_{A(t)}(\lambda) = R_{A_0}(\lambda)[I + tA_1 R_{A_0}(\lambda)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n R_{A_0}(\lambda)[A_1 R_{A_0}(\lambda)]^n.$$

Этот ряд сходится по операторной норме и мажорируется геометрической прогрессией:

$$\|t^n R_{A_0}(\lambda)[A_1 R_{A_0}(\lambda)]^n\| \le C\theta^n.$$

При этом резольвента $R_{A(t)}(\lambda)$ непрерывна по t по норме равномерно по $\lambda \in \Gamma$, так как

$$|t^n - (t')^n| \le |t - t'|n$$

и ряд $\sum n\theta^n$ тоже сходится. Применяем следствие 2. $\square$

Эта теорема применима, например, в условиях теоремы 2 к границе Γ компоненты связности объединения кругов $O(\lambda_j, b(1+\delta)|\lambda_j|^q)$.

7. Операторы с лучами быстрого убывания резольвенты. Как мы уже упоминали, резольвента оператора A не может убывать на бесконечности быстрее $|\lambda|^{-1}$. Предположим, что вдоль некоторого луча Λ, выходящего из начала координат, резольвента $R_A(\lambda)$ неограниченного оператора A существует при достаточно больших $|\lambda|$ и удовлетворяет оценке

$$\|R_A(\lambda)\| \le C|\lambda|^{-1}. \tag{1}$$

Тогда мы скажем, что это *луч быстрого убывания нормы резольвенты*[1] оператора A. Слово "нормы" позволим себе опускать.

Как мы видели, для слабого возмущения A самосопряженного оператора A_0 с дискретным спектром любой луч, отличный от $\mathbb{R}_\pm$, является лучом быстрого убывания резольвенты, а если оператор A_0 полуограничен снизу, то любой луч, кроме $\mathbb{R}_+$.

Предложение 1. *Множество лучей быстрого убывания резольвенты данного оператора открыто.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и при достаточно больших по модулю λ выполнена оценка (1). Тогда при этих λ

$$A - \mu I = (A - \lambda I) - (\mu - \lambda)I = (A - \lambda I)[I - (\mu - \lambda)R_A(\lambda)]$$

– обратимый оператор, если

$$C|\mu - \lambda||\lambda|^{-1} \le \theta < 1,$$

для чего достаточно считать, что $\mu = \lambda e^{i\alpha}$, где модуль угла α достаточно мал. При этом для $\|R_A(\mu)\|$ получается оценка

$$\|R_A(\mu)\| \le C|\lambda|^{-1}\frac{1}{1-\theta} = C_1|\mu|^{-1}. \quad \square$$

[1] Ш. Агмон в 60-е годы прошлого века ввел менее удачное название *луч минимального роста* нормы резольвенты.

Эта оценка равномерна для достаточно больших по модулю μ из некоторой угловой окрестности исходного луча Λ.

К операторам с лучами быстрого убывания резольвенты надо относиться так: это не слишком плохие несамосопряженные операторы, хотя они могут быть далеки от самосопряженных. В дальнейшем мы докажем теорему о полноте корневых векторов (т.е. о плотности их линейных комбинаций в H) для обширного класса таких операторов в предположении, что углы дополнения к множеству лучей быстрого убывания резольвенты не слишком велики.

Особенно удобно предполагать, что луч $\mathbb{R}_-$ целиком входит в резольвентное множество и вдоль него $||R_A(\lambda)|| \le C(1+|\lambda|)^{-1}$. Тогда оператор называют *позитивным.* Для позитивного оператора A можно определить некоторые функции от A при помощи контурных интегралов, включая степени A^γ и экспоненту e^{-tA}, $t>0$. См., например, [A III, 5 и дальше].

В теории эллиптических уравнений в частных производных имеется признак наличия такого луча, он состоит в условии эллиптичности с параметром вдоль этого луча. Рассмотрим (скалярный) оператор в частных производных или ПДО положительного порядка m на замкнутом многообразии, например, на стандартном торе $\mathbb{T}^n$, с главным символом $a_0(x,\xi)$. Говорят, что этот оператор *эллиптичен с параметром вдоль луча* Λ, выходящего из начала, если

$$a_0(x,\xi)-\lambda \ne 0 \ \text{ при } \ (\xi,\lambda)\ne 0,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\Lambda. \tag{2}$$

(Отсюда эллиптичность следует, достаточно положить $\lambda=0$.) Доказывается, что тогда (и только тогда) уравнение

$$Au-\lambda u=f \tag{3}$$

однозначно разрешимо при достаточно больших по модулю $\lambda\in\Lambda$ с априорной оценкой в соболевских нормах

$$||u||_m+|\lambda|||u||_0\le C||f||_0. \tag{4}$$

Эта теорема находится за пределами абстрактной теории операторов, однако именно она (и аналогичная теорема для эллиптических граничных задач) – источник содержательных примеров. Относительно этой теоремы можно смотреть [A III, 2-4].

Замечание. Из наличия луча быстрого убывания резольвенты не следует, что резольвента компактна. Это видно из следующего. Аналог только что приведенной теоремы верен и для операторов в частных производных и ПДО в $\mathbb{R}^n$, но в этом случае резольвента (при отсутствии специальных дополнительных предположений) некомпактна.

2. s-числа компактных операторов

В этом разделе мы в значительной степени следуем книге [ГК].

1. Минимаксимальные свойства собственных значений самосопряженного оператора. Следующая теоерема известна и содержится во многих книгах.

Теорема. *Пусть T – ненулевой неотрицательный компактный оператор с ортонормированным базисом $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных векторов, λ_j – соответствующие собственные значения, и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$. Тогда*

$$\lambda_1(T) = \max \frac{(Tu,u)}{(u,u)} \tag{1}$$

на ненулевых векторах u, причем максимум достигается только на собственных векторах, отвечающих этому собственному значению.

При $j \geq 1$

$$\lambda_{j+1}(T) = \min_{L \in \mathcal{L}_j} \max_{0 \neq u \in L^\perp} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}_j$ – множество всех j-мерных подпространств, причем минимум в (2) достигается, когда L совпадает с линейной оболочкой L_j первых собственных векторов $e_1, \ldots, e_j$, так что

$$\lambda_{j+1}(T) = \max_{0 \neq u \in L_j^\perp} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}. \tag{3}$$

Этот максимум достигается на собственных векторах, отвечающих собственному значению λ_{j+1}.