Лекция 4

4. Сопряженный оператор. Вещественная и мнимая части оператора, диссипативность. Пусть A – линейный оператор в H с плотной областью определения. Тогда, как известно, сопряженный оператор A^* однозначно определяется следующим образом: если для всех $u \in D(A)$

$$(Au, v) = (u, w),$$

то $v \in D(A^*)$ и $A^* v = w$. См., например, [АГ], гл. IV. Там можно найти проверку нескольких утверждений, которые мы сейчас приведем.

Оператор A^* всегда замкнут. Если при этом A замкнут, то A^* плотно определен и $A^{**} = A$. Если A не замкнут, но допускает замыкание, то $A^{**} = \overline{A}$.

Если A ограничен, то A^* ограничен. Если A компактен, то A^* компактен. Если A имеет обратный, то A^* имеет обратный и $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Как следствие оператор, сопряженный к оператору с компактной резольвентой, является оператором с компактной резольвентой.

Спектры операторов A и A^* симметричны относительно вещественной оси. Резольвенты связаны равенством

$$R_A(\lambda)^* = R_{A^*}(\overline{\lambda}). \tag{1}$$

Если A замкнут и имеет плотную область определения, то

$$H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Ran} A^*} = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Ran} A}. \tag{2}$$

(Проверьте самостоятельно.) Здесь и дальше Ran – это Range, область значений. Замкнутость ядра уже отмечалась в случае ограниченного оператора, но она имеет место и в случае замкнутого оператора: если $x_n \to x$ и $Ax_n = 0$, то $x \in D(A)$ и $Ax = 0$.

Для ненулевого собственного значения λ_0 компактного оператора A разложения

$$H = N_A(\lambda_0) \dotplus M_A(\lambda_0), \quad H = N_{A^*}(\overline{\lambda}_0) \dotplus M_{A^*}(\overline{\lambda}_0) \tag{3}$$

связаны так:

$$N_A(\lambda_0) = (M_{A^*}(\overline{\lambda}_0))^\perp, \quad N_{A^*}(\overline{\lambda}_0) = (M_A(\lambda_0))^\perp. \tag{4}$$

Действительно, мы знаем, что с некоторого ν

$$N_A(\lambda_0) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)^\nu = \operatorname{Ker}(A_1 - \lambda_1 I),$$
$$M_A(\lambda_0) = \operatorname{Ran}(A - \lambda_0 I)^\nu = \operatorname{Ran}(A_1 - \lambda_1 I),$$

где A_1 – компактный оператор и $\lambda_1 \neq 0$. Аналогичные соотношения для $N_{A^*}(\overline{\lambda}_0)$ и $M_{A^*}(\overline{\lambda}_0)$ справедливы, как легко проверить, с оператором $A_1^* - \overline{\lambda}_1 I$ вместо $A_1 - \lambda_1 I$. Остается использовать соотношение вида (2) для этих операторов.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

В дальнейшем нам понадобятся следующие *замечания о самосопряженных и нормальных операторах.*

Пусть A – компактный самосопряженный оператор. По теореме Гильберта–Шмидта он имеет ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных векторов. Часть из них составляет базис в ядре оператора $\operatorname{Ker} A$, если оно нетривиально. Пусть λ_j – соответствующие собственные значения. Для любого вектора $u \in H$

$$u = \sum_1^\infty (u, e_j) e_j \quad \text{и} \quad Au = \sum_1^\infty \lambda_j (u, e_j) e_j. \tag{5}$$

(Во второй сумме на самом деле отсутствуют слагаемые с нулевыми λ_j.) При этом

$$\|u\|^2 = \sum_1^\infty |(u, e_j)|^2, \quad \|Au\|^2 = \sum_1^\infty \lambda_j^2 |(u, e_j)|^2. \tag{6}$$

Обобщениями этих формул являются формулы

$$(u, v) = \sum_1^\infty (u, e_j)\overline{(v, e_j)}, \quad (Au, v) = \sum_1^\infty \lambda_j (u, e_j)\overline{(v, e_j)}. \tag{7}$$

Все это варианты равенства Парсеваля.

Аналогично обстоит дело в случае самосопряженного оператора A с компактной резольвентой, при этом условие сходимости второго ряда в (6) равносильно принадлежности вектора u к $D(A)$.

Более общий факт для компактных операторов: если оператор A компактен, то ортонормированный базис из его собственных векторов существует в H тогда и только тогда, когда этот оператор *нормален*, т.е. перестановочен со своим сопряженным:

$$AA^* = A^*A. \tag{8}$$

В этом более общем случае собственные значения уже не обязательно вещественны. Неограниченный оператор A тоже называется нормальным, если выполнено последнее равенство, при этом подразумевается совпадение областей определения слева и справа.

Полезные примеры компактных нормальных операторов – некоторые функции от самосопряженного оператора с компактной резольвентой, например, сама резольвента $R(\lambda)$ в невещественных точках λ.

Дальнейшие замечания для удобства ссылок снабжены номерами.

Замечание 1. *Норма ограниченного нормального оператора с ортонормированным базисом из собственных векторов равна верхней грани модулей его собственных значений.*

Действительно, в тех же, что и выше, обозначениях силу равенства Парсеваля

$$\|Au\|^2 = \sum |\lambda_j|^2 |(u, e_j)|^2$$

мы имеем $\|A\|^2 \leq \sup |\lambda_j|$. С другой стороны, имеется либо единичный собственный вектор e_j, на котором $\|Ae_j\| = \sup |\lambda_j|$, либо последовательность единичных собственных векторов e_{j_k}, по которой $\|Ae_{j_k}\|$ стремится к этой величине.

Замечание 2. *В частности, из формулы для резольвенты самосопряженного оператора с компактной резольвентой*

$$R_A(\lambda) = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j - \lambda} e_j. \tag{9}$$

получаем

$$\|R_A(\lambda)\| = \sup |\lambda_j - \lambda|^{-1} = 1/d(\lambda), \tag{10}$$

где $d(\lambda)$ – расстояние от точки λ до спектра оператора A, и если λ невещественно, то

$$\|R_A(\lambda)\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}. \tag{11}$$

Самосопряженный оператор A называется *полуограниченным снизу* числом c, если $(Au, u) \geq c(u, u)$ (для неограниченного оператора – на его области определения). В этом случае пишут $A \geq c$. Для самосопряженного компактного оператора или оператора с дискретным спектром это равносильно тому, что все его собственные значения не меньше c. Если здесь $c = 0$, то оператор называется *неотрицательным*, а если $c > 0$ – *положительным*. В первом случае пишут $A \geq 0$, во втором можно писать $A > 0$. Очевидным образом определяется и полуограниченность сверху.

Замечание 3. *Пусть A – неотрицательный оператор, компактный или с компактной резольвентой*[1]*. Тогда если $(Au, u) = 0$, то $Au = 0$.*

Действительно, из $(Au, u) = 0$ в этом случае следует, что при каждом j либо $(u, e_j) = 0$, либо $\lambda_j = 0$ (либо то и другое).

Вещественная и мнимая части ограниченного несамосопряженного оператора A определяются равенствами

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*). \tag{12}$$

Это самосопряженные операторы. В случае неограниченного оператора A это определение имеет смысл, если $D(A) = D(A^*)$, и в этом случае $\operatorname{Re} A$ и $\operatorname{Im} A$ определены на $D(A) = D(A^*)$ и *симметричны*: $(Au, v) = (u, Av)$. (Но это не обязательно самосопряженные операторы, см. пример 1 ниже.) Ясно, что

$$A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A. \tag{13}$$

Следует иметь в виду, что в общем случае операторы A и A^* могут иметь разные области определения; см. пример 1 ниже.

[1]Более общие операторы нам не нужны.

В дальнейшем мы будем стараться иллюстрировать новые понятия и факты на простых граничных задачах и интегральных операторах. Договоримся о том, что $G = G^+$ всегда будет обозначать ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ со связной гладкой $(n-1)$-мерной границей, она будет обозначаться через S. Граничные значения функций будем обозначать значком $^+$.

Пример 1. Запишем *формулу Грина для оператора Лапласа* в $G = G^+$:

$$(\Delta u, v)_G - (u, \Delta v)_G = (\partial_\nu u^+, v^+)_S - (u^+, \partial_\nu v^+)_S. \tag{14}$$

Здесь ∂_ν – производная по внешней нормали. Из (14) видно, что задачи

$$-\Delta u + bu = f, \quad \partial_\nu u^+ - cu^+ = 0, \qquad -\Delta v + \overline{b}v = g, \quad \partial_\nu v^+ - \overline{c}v^+ = 0 \tag{15}$$

с комплекснозначными непрерывными (для простоты) функциями b и c формально сопряжены: на гладких функциях

$$(\Delta u + bu, v)_G - (u, \Delta v + \overline{b}v)_G = (\partial_\nu u^+ - cu, v^+)_S - (u^+, \partial_\nu \overline{v}^+ - \overline{c}v^+)_S = 0.$$

Можно показать, что соответствующие операторы $L_2(G)$

$$A : u \mapsto \Delta u + bu \ \text{ и } \ B : v \mapsto \Delta v + \overline{c}v$$

(неформально) сопряжены: $(Au, v)_G = (u, Bv)_G$, $B = A^*$. Это операторы с областями определения, лежащими в $H^2(G)$ и выделяемыми указанными в (15) граничными условиями. Если функция c вещественна, то области определения совпадают, в противном случае они различны.

Пусть они совпадают. Тогда действительная часть оператора - это оператор $u \mapsto \Delta u + (\operatorname{Re} b)u$, он самосопряженный и имеет ту же область определения. А мнимая часть оператора A – это оператор умножения на функцию $\operatorname{Im} b$, он только симметричен на $D(A)$, но имеет самосопряженное расширение – ограниченный оператор умножения на эту функцию в $L_2(G)$.

Пусть $D(A) = D(A^*)$. Оператор A называется *диссипативным*, если $\operatorname{Im} A \geq 0$, т.е.

$$(\operatorname{Im} Au, u) = \operatorname{Im}(Au, u) \geq 0. \tag{16}$$

Собственные значения такого оператора лежат в замкнутой верхней полуплоскости.

Пример 2. Предположим, что задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в G (с граничными условиями $u^+ = \varphi$ и $\partial_\nu u^+ = \psi$ соответственно) однозначно разрешимы. Этим исключается счетное множество вещественных k. Тогда определены взаимно обратные операторы

$$A\varphi = \psi \ \text{ и } \ T\psi = \varphi \tag{17}$$

на решениях этого уравнения. Здесь в первом случае имеется в виду оператор $u^+ \mapsto u \mapsto \partial_\nu u^+$, во втором $\partial_\nu u^+ \mapsto u \mapsto u^+$. Эти два оператора часто встречаются (в этой и более общих ситуациях) в различных вопросах теории уравнений в частных производных. Их английские названия – *Dirichlet-to-Neumann operator* и *Neumann-to-Dirichlet operator*.

Можно показать, что это эллиптические ПДО (псевдодифференциальные операторы) соответственно порядков 1 и -1. Пусть $k = k_1 + ik_2$; обычно считают, что $k_2 \geq 0$.

Из формулы Грина (14) следует, что

$$\operatorname{Im}(T\psi, \psi)_S = -2k_1k_2(u, u)_G. \tag{18}$$

В $L_2(S)$ оператор T компактен, а оператор A с областью определения $H^1(S)$ имеет компактную резольвенту. При $k_1k_2 = 0$ оператор T самосопряженный. Если же это произведение отлично от нуля, то оператор T или $-T$ диссипативен. То же верно для A.

Кстати, эти операторы связаны со спектральной задачей

$$\Delta u + k^2 u = 0 \;\text{ в }\; G, \quad \partial_\nu u^+ = \lambda u^+ \;\text{ на }\; S. \tag{19}$$

Спектральный параметр находится в граничном условии.

Диссипативность оператора обычно связана с поглощением энергии в соответствующей физической задаче, если таковая имеется. Разумеется, знать, что диссипатевен не оператор A, а оператор cA, где c – какая-нибудь постоянная, не менее полезно. Если A диссипативен, то $-A^*$ диссипативен.

Предложение 1. (Ср. [ГК], гл. V, §1.) *Пусть A – диссипативный оператор, компактный или с компактной резольвентой, и λ – его вещественное собственное значение. Тогда в $N_A(\lambda_0)$ все корневые векторы оператора A являются собственными.*

Доказательство. Пусть $Au = \lambda u$, $Av - \lambda v = u$, λ вещественно. Достаточно показать, что $u = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = 0$, т.е. $Av = u$, $Au = 0$. Тогда

$$0 = \operatorname{Im}(Au, u) = (\operatorname{Im} A\ u, u)$$

и $\operatorname{Im} Au = 0$ в силу сделанного выше замечания 3. Поэтому $A^*u = 0$. Отсюда

$$(u, u) = (Av, u) = (v, A^*u) = 0,$$

так что $u = 0$. $\square$

Разумеется, только что доказанное утверждение остается верным и для оператора, сопряженного к диссипативному.

5. Слабые возмущения самосопряженных операторов. Из объектов нашей теории один из важнейших – *слабое возмущение самосопряженного оператора* (компактного или с компактной резольвентой); другое название – *оператор, близкий к самоспряженному*. Это оператор вида

$$A = A_0 + A_1, \tag{1}$$

где A_0 – самосопряженный оператор, а оператор A_1 в том или ином смысле подчинен оператору A_0. Условимся считать, что A_0 имеет ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных векторов и собственные значения λ_j, при этом *предположим*, что все они отличны от нуля, т.е.

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}. \tag{2}$$

Тогда оператор A_0^{-1} (не обязательно ограниченный) существует, даже если A – компактный оператор. Этот обратный оператор имеет тот же ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty$ и собственные значения λ_j^{-1}, обратные к собственным значениям оператора A_0. Конечно, если A_0 компактен, то A_0^{-1} – оператор с компактной резольвентой.

Подчиненность оператора A_1 оператору A_0 может иметь разную силу.

Простейший и наиболее слабый вид подчинения состоит в том, что *оператор A_1 компактен относительно оператора A_0.* Это означает, что оператор $A_1 A_0^{-1}$ компактен.

Для определения вариантов более глубокого подчинения нам нужны степени оператора A_0. Пусть $\operatorname{Ker} A_0$ тривиально; если у этого оператора есть отрицательные собственные значения, то для определенности будем считать, что они имеют аргументы π. Определим оператор A_0^γ при любом вещественном γ формулой[2]

$$A_0^\gamma u = \sum_1^\infty \lambda_j^\gamma (u, e_j) e_j, \tag{3}$$

где $(re^{i\pi})^\gamma = r^\gamma e^{i\pi\gamma}$.

Пусть A_0 – оператор с компактной резольвентой. Мы скажем, что *оператор A_1 имеет порядок q относительно оператора A_0*, если оператор $A_1 A_0^{-q}$ ограничен. Здесь, конечно, нам нужны значения $q < 1$.

Ясно, что это условие более жесткое, оно влечет предыдущее, так как $A^{-1} = A^{-q} A^{-1+q}$ и здесь второй сомножитель – компактный оператор.

Как правило (но не всегда) в качестве A_0 берется действительная часть оператора A.

[2]Для неограниченных операторов с максимально быстрым убыванием нормы резольвенты вдоль $\mathbb{R}_-$ (определение вскоре будет приведено) имеется другой способ определения степеней – при помощи контурных интегралов. См., например, [A III, 5].