Лекция 11

Итак, рассматриваем функцию

$$D_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(1+\lambda\lambda_j^{(n)}). \tag{25}$$

Ее логарифмическая производная имеет вид

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j^{(n)}}{1+\lambda\lambda_j^{(n)}}. \tag{26}$$

Мы покажем, что

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} \to \operatorname{Sp} T \quad (n\to\infty) \tag{27}$$

равномерно в любой ограниченной области. Для этого, учитывая (23), предположим, что

$$|\lambda\lambda_1^{(n)}| \le \theta < 1, \tag{28}$$

и разложим $1/[1+\lambda\lambda_j^{(n)}]$ в геометрическую прогрессию. Получим из (26)

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}[\operatorname{Sp} T_n^k]\lambda^{k-1}, \tag{29}$$

так как T_n^k можно рассматривать как оператор в конечномерном пространстве P_nH и, значит,

$$\sum_j [\lambda_j^{(n)}]^k = \operatorname{tr} T_n^k = \operatorname{Sp} T_n^k. \tag{30}$$

В (29) первое слагаемое справа – это $\operatorname{tr} T_n = \operatorname{Sp} T_n$. В дальнейших слагаемых

$$|\operatorname{Sp} T_n^k| = \left|\sum_{j=1}^{n}[\lambda_j^{(n)}]^k\right| \le |\lambda_1^{(n)}|^{k-1}|T_n|_1,$$

и здесь $|T_n|_1 \le |T|_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left|\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} - \operatorname{Sp} T\right| &\le |\operatorname{Sp} T_n - \operatorname{Sp} T| + |T|_1\sum_{k=2}^{\infty}(|\lambda_1^{(n)}||\lambda|)^{k-1}\\ &\le |\operatorname{Sp} T_n - \operatorname{Sp} T| + \frac{|\lambda_1^{(n)}|\cdot|\lambda|\cdot|T|_1}{1-|\lambda\lambda_1^{(n)}|}\end{aligned}$$

(здесь мы просуммировали геометрическую прогрессию). Отсюда, из (23), (24) и (28) получаем (27).

Из (27) следует, что

$$D_n(\lambda) \to e^{a\lambda}, \quad \text{где} \quad a = \operatorname{Sp} T, \tag{31}$$

также равномерно в любой ограниченной области.

Теперь мы оценим $D_n(\lambda)$, привлекая другие соображения. Очевидно, что

$$|D_n(\lambda)| \le \prod_{j=1}^{n} (1 + |\lambda_j^{(n)}||\lambda|).$$

Мы знаем, что правая часть не превосходит

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + s_j^{(n)}|\lambda|)$$

при любом n. Здесь $s_j^{(n)} \le s_j = s_j(T)$. Заменим $s_j^{(n)}$ на s_j и произведение n сомножителей на бесконечное произведение по всем натуральным j (последний шаг напоминает жертву в шахматной партии). При больших j воспользуемся элементарной оценкой

$$1 + s_j|\lambda| \le e^{s_j|\lambda|}$$

(вторая шахматная жертва). Получим

$$|D_n(\lambda)| \le \prod_{j=1}^{N} (1 + s_j|\lambda|) \exp\left[|\lambda| \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j\right]. \tag{32}$$

Это и есть нужная нам оценка.

Теперь мы предположим, что $a \ne 0$, и приведем это предположение к противоречию. Пусть $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, где $\varphi = -\arg a$, тогда получим в пределе при $n \to \infty$

$$e^{|a|\rho} \le \prod_{j=1}^{N} (1 + \rho s_j) \cdot \exp\left[\rho \sum_{k=N+1}^{\infty} s_k\right]$$

для любых $\rho > 0$ и N. Ясно, что при достаточно большом N это невозможно, если ρ достаточно велико. □ □

Следствия. 1. *Спектральный след* $\operatorname{tr} T$ *– линейный непрерывный функционал на пространстве ядерных операторов.*

2. *Если* B *– обратимый ограниченный оператор, то*

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr}(B^{-1}TB). \tag{33}$$

Действительно, матричный след является линейным непрерывным функционалом над $\mathfrak{S}_1$ (непрерывность видна из (17)). Равенство (33) получается так:

$$\operatorname{Sp}(B^{-1}TB) = \operatorname{Sp}(TBB^{-1}) = \operatorname{Sp} T. \quad \square$$

Если бы мы заранее знали, что и $\operatorname{tr} A$ – линейный непрерывный функционал на $\mathfrak{S}_1$, то легко вывели бы утверждение теоремы 5 (см. лекцию 10) из совпадения матричного и спектрального следа для оператора в конечномерном пространстве.

3. Операторы Гильберта–Шмидта. Исходное определение состояло в том, что класс $\mathfrak{S}_2$ состоит из операторов T со сходящимся рядом из квадратов s-чисел:

$$|T|_2^2 = \sum s_j(T)^2 < \infty. \tag{1}$$

Предложение 1. *Это определение эквивалентно следующему: оператор T^*T имеет конечный матричный след. При этом*

$$\begin{aligned} |T|_2^2 = \operatorname{Sp}(T^*T) &= \sum (T^*Tg_j, g_j) = \sum \|Tg_j\|^2 \\ &= \sum_{j,k} (Tg_j, g_k)(g_k, Tg_j) = \sum_{j,k} |(Tg_j, g_k)|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

для любого ортонормированного базиса $\{g_j\}$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathfrak{S}_2$. Тогда и $T^* \in \mathfrak{S}_2$, поэтому произведение T^*T принадлежит $\mathfrak{S}_1$, в частности, имеет конечный (матричный и спектральный) след. Если $\{e_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора, то

$$\operatorname{Sp}(T^*T) = \sum (T^*Te_j, e_j) = \sum s_j^2(T) = |T|_2^2.$$

Матричный след ядерного оператора не зависит от выбора ортонормированного базиса, и в таком базисе $\{g_j\}$ мы имеем

$$\operatorname{Sp}(T^*T) = \sum (T^*Tg_j, g_j) = \sum (Tg_j, Tg_j) = \sum_{j,k} (Tg_j, g_k)(g_k, Tg_j). \quad \square \tag{3}$$

Теорема 2. *Пространство $\mathfrak{S}_2$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$\langle T, S\rangle = \operatorname{Sp}(TS^*). \tag{4}$$

Доказательство. Произведение TS^* – ядерный оператор. Очевидно, что форма (4) линейна по T и сопряженно-линейна по S. Величина $\langle T, T\rangle$, как мы только что видели, совпадает с $|T|_2^2$. Полнота доказана раньше. $\square$

Дополнительно получаем, что $|T|_2$ – норма (а не квазинорма).

Теорема 3. *Пусть G – область в евклидовом пространстве R^n и $H = L_2(\Omega)$. Тогда пространство $\mathfrak{S}_2$ состоит из интегральных операторов*

$$Tu(x) = \int_G K(x, y) u(y)\, dy \tag{5}$$

с квадратично интегрируемыми ядрами. При этом

$$|T|_2 = \|K(x,y)\| = \|K(x,y)\|_{L_2(G\times G)}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j(x)\}$ – ортонормированный базис в $L_2(G)$. Тогда, как известно, функции

$$\psi_{j,k}(x,y) = \overline{\varphi_j(y)}\varphi_k(x) \tag{7}$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(G\times G)$.

Пусть T – оператор (5) с квадратично интегрируемым ядром. Тогда

$$c_{jk} = (T\varphi_j, \varphi_k) = \int_G\int_G K(x,y)\varphi_j(y)\overline{\varphi_k(x)}\,dy\,dx \tag{8}$$

– это коэффициенты Фурье ядра по системе $\psi_{j,k}$ и ряд из квадратов их модулей сходится, а его сумма равна квадрату L_2-нормы ядра. Таким образом, в силу (2)

$$|T|_2^2 = \sum_{j,k}|(T\varphi_j,\varphi_k)|^2 = \sum_{j,k}|c_{j,k}|^2 = \|K(x,y)\|^2 < \infty.$$

Обратно, пусть T – оператор из $\mathfrak{S}_2$ в $L^2(G)$. Построим ядро $K(x,y)$ с коэффициентами Фурье (8) по базису (7). Нетрудно проверить, что взятый оператор и интегральный оператор с этим ядром $K(x,y)$ одинаково действуют на базисные функции φ_j, поэтому эти операторы совпадают. $\square$

Аналогичные теоремы верны для $H = L_2(S)$ (где S – поверхность). Им можно придать гораздо бо́льшую общность: с более общими мерами и с вектор-функциями.

4. Вычисление следов. Обсудим теперь, как вычисляются следы ядерных операторов в пространствах L_2.

Справедлива следующая теорема Мерсера:

Пусть T – интегральный оператор в $L_2(G)$ или $L_2(S)$ с непрерывным ядром $K(x,y)$:

$$Tu(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy, \tag{1}$$

и пусть это неотрицательный оператор. Тогда ядро $K(x,y)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$K(x,y) = \sum \lambda_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}, \tag{2}$$

где λ_k – все ненулевые собственные значения этого оператора и $\{\varphi_k\}$ – ортонормированный базис из соответствующих собственных функций.

Следовательно, этот оператор ядерный и

$$\operatorname{tr} T = \int K(x,x)\,dx. \tag{3}$$

Из этой теоремы выводится следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* (2) *– интегральный оператор с непрерывным ядром, и пусть это ядерный оператор. Тогда его след вычисляется по формуле* (3).

Наметим доказательство. Технически здесь не очень прост переход от неотрицательного оператора к общему самосопряженному оператору T, так как мы не знаем, непрерывны ли ядра операторов T_+ и T_-. Используется операция сглаживания этих ядер, состоящая в следующем.

Пусть $\theta_1(x)$ – неотрицательная четная функция из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная 0 при $|x| \geq 1$ и такая, что $\int \theta_1(x)\,dx = 1$. Положим

$$\theta_h(x) = h^{-n}\theta_1(x/h) \quad (0 < h \leq 1). \tag{4}$$

Введем оператор

$$\Theta_h u(x) = \int_G \theta_h(x-y)u(y)\,dy \quad (x \in G). \tag{5}$$

Проверяются следующие свойства этого оператора в $H_0(G)$.

1. Он ограничен равномерно по h.

2. Он сильно сходится в $L_2(G)$ к единичному оператору I при $h \to 0$ (т.е. $\|\Theta_h u - u\|_0 \to 0$).

3. $\Theta_h^* = \Theta_h$.

Ниже до конца пункта через T обозначается интегральный оператор

$$Tu(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy \tag{6}$$

с квадратично интегрируемым ядром (в предыдущем пункте мы показали, что это общий оператор Гильберта–Шмидта в $L_2(G)$). Через T_h обозначим оператор $\Theta_h T \Theta_h$. Это интегральный оператор с бесконечно гладким ядром

$$K_h(x,y) = \int_G \int_G \theta_h(x-\widetilde{x})\theta_h(y-\widetilde{y})K(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{x}\,d\widetilde{y}. \tag{7}$$

4. Если T – ядерный оператор, то и T_h ядерный. Если T – неотрицательный оператор, то и T_h неотрицательный.

5. Если T – ядерный оператор, то $\operatorname{tr} T_h \to \operatorname{tr} T$.

6. $\int_G K_h(x,x)\,dx \to \int_G K(x,x)\,dx$.

После этой подготовки справиться со случаем самосопряженного оператора несложно. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} T &= \operatorname{tr} T^+ - \operatorname{tr} T^- = \lim[\operatorname{tr}(T^+)_h - \operatorname{tr}(T^-)_h] \\ &= \lim \int_G [K_h^+(x,x) - K_h^-(x,x)]\,dx = \lim \int_G K_h(x,x)\,dx = \int_G K(x,x)\,dx.\end{aligned}$$

Переход к общему ядерному интегральному оператору T с непрерывным ядром уже не вызывает труда, так как достаточно рассмотреть действительную и мнимую части этого оператора. $\square$