1. Укажите минимальный многочлен для (**а**) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$; (**б**) $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.

2. (**а**) Обозначим через C_n множество первообразных корней степени n из 1. Постройте естественную биекцию $C_{n_1} \times C_{n_2} \to C_{n_1 n_2}$ для взаимно простых n_1, n_2. (**б**) Докажите, что сумма всех первообразных корней из единицы степени n совпадает с функцией Мёбиуса $\mu(n)$ (определение см. в предыдущем листке).

3. Является ли $\frac{3+4i}{5}$ корнем из единицы некоторой степени?

4.* Докажите, что все достаточно большие простые делители значений $\Phi_n(x)$ при натуральных x сравнимы с единицей по модулю n, и выведите из этого, что простых чисел, сравнимых с единицей по модулю n, бесконечно много.

5. Какие из следующих утверждений верны: (**а**) $\mathbb{Q}[\xi_{36}] \subset \mathbb{Q}[\xi_{120}]$; (**б**) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{Q}[\xi_5]$; (**в**) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \subset \mathbb{Q}[\xi_5]$?

6. Докажите равенство $p = \prod\limits_{k=1}^{p-1} (1-(\xi_p)^k)$ и выведите из него, что $\mathbb{Q}\left[\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\right] \subset \mathbb{Q}[\xi_p]$ при нечётном простом p.

7.* Как доказано на лекции, группа автоморфизмов кругового поля есть $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Разложите эту группу в прямую сумму циклических групп. (Например, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, а $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

8. Пусть p — нечётное простое число, g — образующая группы $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. (**а**) Докажите, что $(\xi_p)^{g^2} + \ldots + (\xi_p)^{g^{p-1}}$ и $(\xi_p)^g + (\xi_p)^{g^3} + \ldots + (\xi_p)^{g^{p-2}}$ — квадратичные иррациональности (корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами). (**б**) Вычислите явно эти квадратичные иррациональности для $p = 17$.

9. Является ли (**а**) $\sqrt{2}+i$; (**б**) $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$ примитивным элементом $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$ над $\mathbb{Q}$?