Введение. Проблема индекса

I. Дифференциальные уравнения.

Уравнение

$Du = f$

u, f — функции от $(x_1, \ldots, x_n)$

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

m — порядок оператора,
$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс

↓

точное решение

Пример. Уравнение с постоянн. коэффиц. $\overset{\text{преобр. Фурье}}{\Rightarrow}$

$D(p)\widehat{U}(p) = \widehat{f}(p)$, где

$D(p) = \sum_\alpha a_\alpha p^\alpha \neq 0$

↓

существование и единственность решения

зависит от младших членов оператора

↓

фредгольмовость в узком смысле (Фредгольм)

Пример. $-i\frac{d}{d\varphi}u = f$

- разрешимо $\Leftrightarrow \int f d\varphi = 0$
- решений много: $u + Const.$

↓

нормальная разрешимость, нётеровость, фредгольмовость (в широком смысле)

Индекс
$\operatorname{ind} D = \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D.$

Пример: оператор Эйлера

$$\widehat{e} = d + d^* : \Lambda^{ev} \longrightarrow \Lambda^{odd}$$
$$\operatorname{ind} \widehat{e} = \chi(M), \quad \chi(\mathbb{S}^2) = 2 \neq 0$$

индекс не меняется при непрерывной деформации оператора и не зависит от младших членов

II. Эллиптические операторы

Проблема индекса

Опр. *Главный символ оператора*

$$\boxed{\sigma(D)(x,p) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) p^\alpha, \quad p \in \mathbb{R}^n}$$

$$\boxed{\text{Оператор } D \text{ на многообразии } M} \Rightarrow \boxed{\sigma(D) \text{ на кокасат. расслоении } T^*M}$$

Опр. D *эллиптический*, если

$$\sigma(D)(x,p) \neq 0 \text{ при } p \neq 0.$$

Теорема (конечности)

$$\boxed{D \text{ — эллиптический}} \Leftrightarrow \boxed{D \text{ — фредгольмов}}$$

$$\boxed{\textbf{индекс определяется главным символом и не меняется при деформациях главного символа}}$$

Проблема индекса:

$$\boxed{\text{найти формулу } \operatorname{ind} D = f(\sigma(D))} \quad \text{И. Гельфанд}$$

т.е. надо выразить бесконечномерный инвариант через конечномерный.

$$\boxed{\text{Атья — Зингер, 1962.}}$$

III. Метод получения формулы индекса

$$\mathrm{Ell}(M) = \left\{ \begin{array}{c} \text{все эллиптические операторы} \\ \text{на многообразии } M \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

операторы *стабильно гомотопны*: $D_1 \sim D_2$	$\Leftrightarrow$	$D_1 \oplus \Delta$ гомотопен $D_2 \oplus \Delta'$, Δ, Δ' — лапласианы

$i_a \equiv \mathrm{ind} : \mathrm{Ell}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$ — гомоморфизм групп.

Естественные рамки задачи об индексе:

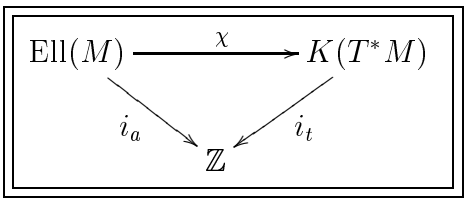
- не обязательно полиномиальные символы;
- операторы на вектор-функциях $f \in C^\infty(M, \mathbb{C}^n)$ или в сечениях расслоений: $C^\infty(M, E)$

Теорема $\boxed{\mathrm{Ell}(M) \overset{\chi}{\simeq} K(T^*M)}$ $\Big\|$ $K(T^*M)$ — K-группа кокасательного расслоения

$D \longmapsto [\sigma(D)]$

эллипт. оператор — класс стабильной гомотопии символа

Теорема Атьи–Зингера об индексе



$$i_t = p_! : K(T^*M) \longrightarrow K(pt) = \mathbb{Z}$$

— отображение прямого образа, индуцированное

$$p : M \longrightarrow pt$$

$$i_a(D) = p_! \chi(D) \qquad \text{или}$$

$$i_a(D) = p_! [\sigma(D)].$$

IV. Частные случаи

1. Матричные операторы.

$$\mathrm{Ell}'(M) = \left\{ \begin{array}{c} \text{эллиптические матр.} \\ \text{операторы на } M \end{array} \right\} \Big/ \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{стабильн.} \\ \text{гомотопии} \end{array} \right\}$$

Теорема об индексе

S^*M — косферы

$$\mathrm{Ell}'(M) \simeq K^1(S^*M) \longrightarrow K(T^*M)$$
$$i_a \searrow \quad \swarrow i_t$$
$$\mathbb{Z}$$

2. Тёплицевы операторы на окружности

$$L^2(\mathbb{S}^1) = H_+ \oplus H_-, \qquad z = e^{i\varphi}$$

$H_+ = \left\{ \sum_{k \geq 0} a_k z^k \right\}$ — пространство Харди граничных значений голом. функций в диске

$P : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ — ортогональный проектор на H_+

f — непрерывная функция на $\mathbb{S}^1$ $\longrightarrow$ $T_f : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$, $T_f u = Pfu + (1-P)u$

Утв. T_f — оператор с символом:

$$\sigma(T_f)(\varphi, p) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\varphi), & p > 0 \\ 1, & p < 0 \end{array} \right.$$

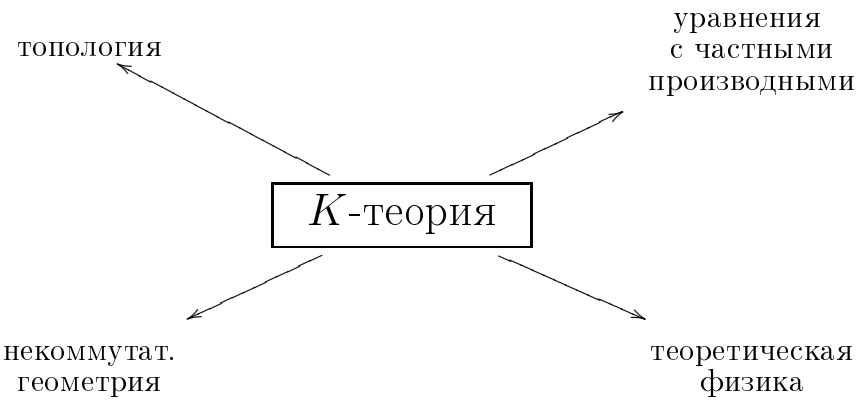
$$T^*\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad S^*\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times 2\{\text{point}\}$$

Теорема

($w(f)$ — число вращения)

1. если $f(\varphi) \neq 0$, $\forall \varphi \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow T_f$ — эллиптический
2. $\operatorname{ind} T_f = -w(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int d \ln f.$

Зачем (и кому) нужна K-теория?



Что изучает K-теория?

Изучаются *векторные расслоения*

Линейная алгебра	Топология
векторное пространство	топологич. пространство

↓ ↓

векторное расслоение	=	семейство векторных пространств, параметризованных точками топол. пространства.

Пример $T\mathbb{S}^2 = \bigcup_x T_x\mathbb{S}^2$ ↓

K-функтор		
пространство	$\longmapsto$	кольцо
X		$K(X)$

K-функтор введем в Лекции 3, а сейчас разберемся с векторными расслоениями.

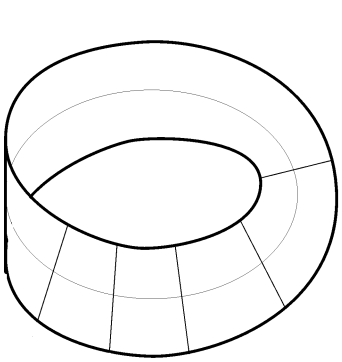
Лекция 1. Векторные расслоения

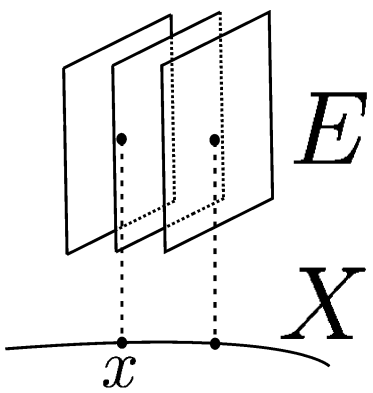
X — топологическое пространство

Опр. *Семейство векторных пространств на X* это пара:
- пространство E;
- отображение $p : E \longrightarrow X$,

такая что $\forall x \in X \ E_x = p^{-1}(x)$ — конечномерное линейное пространство (и топологии совместимы)

Терминология. *X — база, E_x — слой, E — тотальное пространство.*





Пример 1 (тривиальное семейство)

$X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X$

Пример 2 (лист Мёбиуса)

$$\gamma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \Big/ \{(\varphi, t) \sim (\varphi + \pi, -t)\}$$

$$= \left\{ (l, x) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{прямая в } \mathbb{R}^2, \\ \text{проходящая} \\ \text{через } 0 \text{ и } x \in l \end{array} \right\}$$

Предл. γ — нетривиальное расслоение на окружности.

Док-во. У γ нет ненулевых сечений. □

Опр. $\boxed{\textit{сечение } s : X \longrightarrow E} \iff \boxed{\pi s = id_X}$

E и E' — семейства векторных пространств

Опр. $\boxed{\varphi : E \longrightarrow E' \text{ — } \textit{гомоморфизм}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\varphi \text{ линейно переводит слой в слой: } \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & X & \end{array}}$

Опр. $\boxed{\varphi : E \longrightarrow E' \text{ — } \textit{изоморфизм}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists \text{ непрерывный обратный: } \varphi^{-1} : E' \longrightarrow E}$

Опр. $\boxed{E \text{ — } \textit{векторное расслоение}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} E \text{ — } \textit{локально-тривиально}: \\ \forall x \in X \text{ в некот.окрестности } U_x \\ \text{существует } \textit{тривиализация}: \\ E|_{U_x} \simeq U_x \times \mathbb{C}^n \end{array}}$

n — *размерность* (ранг) расслоения (локально-постоянна)

$\mathrm{Vect}(X)$ — множество классов эквивалентности векторных расслоений (есть и $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$)

Пример (касательное расслоение к сфере)

$$\boxed{T\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, v) \;\middle|\; \begin{array}{c} |x| = 1 \\ \langle x, v \rangle = 0 \end{array} \right\}}$$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{в локальных} \\ \text{координатах базис} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{T\mathbb{S}^2 \text{ — векторное расслоение}}$

Позже докажем, что $T\mathbb{S}^2$ — нетривиально!

Пример (нормальное расслоение)

$$N\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,v) \;\middle|\; \begin{array}{c} |x| = 1, \\ [x,v] = 0 \end{array} \right\}$$

$N\mathbb{S}^2$ — тривиальное расслоение
(ненулевое сечение — поле внешних нормалей (x,x))

В общем случае

E — тривиально
$\dim E = n$

$\Longleftrightarrow$

$\exists n$ сечений $s_1, \ldots, s_n$ линейно-независимых в каждой точке $x \in X$.

Пространство сечений расслоения $\Gamma(E)$ — линейное пр-во.

Примеры

- $\Gamma(X \times \mathbb{C}^n) = C(X, \mathbb{C}^n)$ — вектор-функции;
- $\Gamma(\gamma) \simeq \{$нечётные функции на окружности$\}$

Замечание. $\Gamma(E)$ — модуль над алгеброй $C(X)$ непрерывных функций

Операции с расслоениями на X

название	обозначение	слой
прямая сумма (сумма Уитни)	$E \oplus F$	$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$
тензорное произведение	$E \otimes F$	$(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$
двойственное расслоение	E^*	$(E^*)_x = (E_x)^*$
	$\vdots$	

Пример. $T\mathbb{S}^2 \oplus N\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ — тривиально

Индуцированное отображение

$$\boxed{f : X \longrightarrow Y} \quad \Rightarrow \boxed{f^* : \mathrm{Vect}(Y) \longrightarrow \mathrm{Vect}(X)}$$

$$(f^*E)_x = E_{f(x)} \qquad \text{или} \qquad f^*E = \{(x, e) \in X \times E | f(x) = \pi(e)\}$$

— *обратный образ*

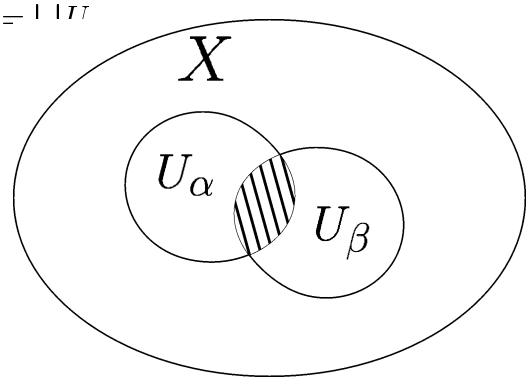
функториальность: $\boxed{f^*g^* = (gf)^*}$

Локальное описание векторных расслоений

Вопрос: **Есть ли локальная модель для векторных расслоений?**

Земля, атлас, карты

Локализация: $X = \bigcup U_\alpha$



- над U_α тривиализация: $E|_{U_\alpha} \overset{\psi_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$
- на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$:

$$\varphi_{\beta\alpha}(x) = \psi_\beta \psi_\alpha^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

— *функция перехода* (*склейки*)

$$\Longrightarrow \qquad (*) \boxed{E = \left\{ \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}^n \right\} \Big/ \sim}$$

склейка кусков

$$(x_\alpha, v_\alpha) \sim (x_\beta, v_\beta)$$
$$\Updownarrow$$
$$x_\alpha = x_\beta, v_\beta = \varphi_{\beta\alpha} v_\alpha$$

В обратную сторону:

$$\{U_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}\} \Longrightarrow \boxed{(*) \text{ — векторное расслоение}}$$

если имеют место:

- *симметричность*: $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} = Id$;
- *транзитивность*: $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\gamma\alpha} = Id$ (условие коцикла).

Пример 1 (лист Мёбиуса)

$$\mathbb{S}^1 = \underbrace{(\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\})}_{U} \cup \underbrace{(\mathbb{S}^1 \setminus \{+1\})}_{V}$$

$$U \cap V = W_+ \cup W_-$$

$$\varphi_{VU}|_{W_+} = 1, \quad \varphi_{UV}|_{W_-} = -1.$$

Пример 2 (расслоение Хопфа)

$$\boxed{\begin{array}{c} U = \mathbb{S}^2 \setminus S, \quad V = \mathbb{S}^2 \setminus N \\ \varphi_{VU} = z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{одномерное комплексное расслоение} \\ \gamma \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^2) \text{ — } \textit{расслоение Хопфа} \end{array}}$$

Упражн. $$\gamma \simeq \left\{ (l, x) \;\middle|\; \begin{array}{c} l \subset \mathbb{C}^2 \text{ — прямая,} \\ \text{проходящая через } 0 \text{ и } x \end{array} \right\}$$