Анализ-1. 18.09.03

1. Сколько предельных точек может иметь последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, если
а) $|x_n - x_{n+1}| \to 0$, $n \in \mathbb{N}$;
б) $|x_n + x_{n+1}| \to 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2. **а)** Приведите пример числа $x > 1$, которое не является целым, но при этом последовательность $\{x^n\}$ имеет предел. $\{a\} = a - [a]$ - дробная часть числа.
б) Может ли при этом число x быть рациональным ?

3. Существуют ли многочлен от двух переменных $P(x, y)$ такой, что точка $z = 0$, не принадлежит его области значений, но является предельной точкой области значений?

4. Найти все предельные точки последовательности $x_n = \sin n$.

5. Привести пример бесконечного поля, в котором есть отношение порядка, согласованное со всеми алгебраическими операциями, но не выполняется аксиома Архимеда (аксиома Архимеда: для любых $a, b > 0$ существует натуральное N такое, что $Na > b$).

6. Доказать, что множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, имеет мощность континуума.

7. Можно ли разместить на плоскости несчетное число непересекающихся восьмиугольников, все стороны которых равны 1 ? (Под восьмиугольником здесь понимается только его контур, без внутренности. Восьмиугольники несамопересекающиеся и не обязательно выпуклые).

8. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ является алгебраическим.