Приведение пары форм к каноническому виду

На прошлой лекции мы доказали, что для каждой вещественной квадратичной формы есть базис, в котором она имеет особенно простой вид: её матрица диагональна, причём на диагонали стоят числа $1, -1, 0$. В этой лекции мы выясним, к какому простому виду можно (с помощью выбора подходящего базиса) привести пару квадратичных форм. Точнее говоря, мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть на вещественном линейном пространстве V даны две квадратичные формы $q(x)$ и $Q(x)$, причём $q(x)$ *положительно определена*, т. е. $q(x) > 0$ при $x \in V, x \neq 0$. Тогда можно выбрать базис пространства V, в котором матрицы этих форм диагональны, причём матрица формы q — единичная.

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место для эрмитовых форм.

Замечание 2. Требование положительной определённости существенно. В задачах приведён пример двух форм, которые не приводятся одновременно к диагональному виду.

То, что для положительно определённой формы канонический вид, описанный в прошлой лекции, есть именно сумма квадратов (то есть нет минусов и нулей), очевидно: иначе бы условие положительной определённости нарушалось бы уже на базисных векторах. В соответствующем базисе эта форма есть стандартное евклидово скалярное произведение (сумма произведений координат), т. е. базисные вектора попарно ортогональны и имеют единичную длину. Поэтому теорему можно сформулировать так: существует ортонормированный базис для формы q, в котором матрица формы Q диагональна (т. е. базисные векторы ортогональны и относительно Q).

Пример 1. Доказанная теорема в этой формулировке используется, например, для классификации кривых второго порядка на плоскости. Кривая второго порядка задаётся уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = b$ (для простоты мы на самом деле рассматриваем лишь некий частный случай). Утверждается, что можно выбрать ортогональный базис относительно стандартного скалярного произведения, в котором уравнение имеет вид $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 = b$. Легко видеть, что эта замена базиса есть движение плоскости, сохраняющее начало координат. Значит, можно утверждать, что движением любую кривую можно привести к простому каноническому виду («метрическая классификация кривых второго порядка»).

Итак, будем считать, что мы уже привели форму q к каноническому виду (диагональная матрица с единицами на диагонали). В соответствующем базисе форма Q имеет матрицу (Q_{ij}), $Q_{ij} = Q(e_i, e_j)$. Мы хотим воспринимать эту матрицу как матрицу линейного оператора (что особенно сложно, если использовать обозначения с верхними и нижними индексами …). Для этого нужно немного порассуждать. Пусть есть линейный оператор A на пространстве V. Тогда можно образовать билинейную форму $f_A(x, y) = B_q(Ax, y)$. (Здесь B_q — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме q.) Оператор A называется *симметричным (самосопряжённым)*, если полученная билинейная форма симметрична. Это требование равносильно тому, что $B_q(Ax, y) = B_q(x, Ay)$. (В частности, эти определения зависят от формы q.)

В координатах (вспомним, что матрица формы q — единичная матрица E) для любых векторов x, y имеет место равенство

$$(Ax)^t y = (Ax)^t E y = B_q(Ax, y) = B_q(x, Ay) = x^t E A y = x^t A y.$$

(Здесь X^t — транспонированная матрица; теперь, в отличие от предыдущих лекций, обозначение более стандартно).

Упражнение 1. Если произведение матриц A и B определено (т. е. размеры согласованы), то $(AB)^t = B^t A^t$.

Поэтому $x^t A^t y = x^t A y$ при всех $x, y \in V$. Отсюда следует, что матрица оператора A в нашем базисе симметрична.

«Инвариантное» описание ситуации таково: билинейная форма B задаёт отображение $B\colon V \to V^\vee$ (исходного пространства в сопряжённое), а именно, вектор v переходит в функционал $B(v)$, $(B(v))(w) = B(v, w)$. Ясно, что это отображение есть линейное отображение. Его ядро есть в точности левое ядро формы B (см. задачи к прошлой лекции). Если соответствующая нашей билинейной форме квадратичная форма положительно определена, то её ядро, очевидно, состоит лишь из нуля, поэтому есть и обратное отображение. Поэтому в условиях теоремы можно построить два отображения: $B_Q\colon V \to V^\vee$, $B_q^{-1}\colon V^\vee \to V$. Их композиция есть линейный оператор на пространстве V. Легко проверить, что он симметричен относительно формы B_q.

Теперь наша теорема переформулирована следующим образом:

Теорема 2. Пусть дана положительны определённая квадратичная форма q и линейный оператор A, симметричный относительно билинейной формы B_q. Тогда существует ортонормированный базис для формы q, в котором матрица оператора A диагональна.

Замечание 3. Вектор x называется *собственным* для оператора A, если $Ax = \lambda x$ для некоторого числа λ. В этом случае число называется *собственным значением* оператора A. То, что матрица оператора диагональна, означает, что базис состоит из собственных векторов, а на диагонали стоят собственные значения.

Пример 2. Если оператор не симметричен, то теорема не верна. У оператора $\left(\begin{smallmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{smallmatrix}\right)$ нет собственных векторов, у оператора $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ — только один собственный вектор.

В частности, из теоремы следует, что у симметричного оператора обязательно есть собственный вектор. Докажем это утверждение. Для этого выясним, при каком условии число λ является собственным значением оператора A. Если существует ненулевой вектор x, для которого $Ax = \lambda x$, то у однородной системы уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ есть ненулевое решение (E — тождественный оператор; $Ex = x$ при всех x). Как мы знаем, это равносильно тому, что $\det(A - \lambda E) = 0$. (Заметим, что хотя раньше мы говорили об определителе матрицы, для линейного оператора тоже можно говорить об определителе. В самом деле, можно взять матрицу оператора в некотором базисе и вычислить её определитель. В другом базисе матрица умножается справа на матрицу перехода и слева — на обратную к ней. По теореме об определителе произведения, определитель не изменится.)

Определитель $\det(A - \lambda E)$ — очевидно, многочлен от λ (этот многочлен называется *характеристическим многочленом* оператора A). Значит, собственные значения суть корни этого многочлена, а собственные векторы суть решения соответствующих систем уравнений (решения существуют, раз определитель равен нулю). Поэтому наличие собственного вектора равносильно тому, что характеристический многочлен имеет хотя бы один вещественный корень.

Для доказательства используем идею комплексификации. А именно, по вещественному линейному пространству V можно построить пространство $V_{\mathbb{C}}$ над полем комплексных чисел. Как это сделать, обсуждалось на предыдущей лекции. Там же было сказано, что поскольку значения и вещественной билинейной формы, и комплексной полуторалинейной формы определяются значениями на базисе, то билинейной форме на вещественной пространстве соответствует полуторалинейная форма на его комплексификации. В частности, положительно определённой квадратичной форме соответствует положительно определённая эрмитова форма. Линейный оператор на вещественном пространстве соответствует линейному оператору на комплексификации, причём симметричному оператору соответствует симметричный (определение такое же).

Зачем нужна комплексификация? Дело в том, что всякий линейный оператор на комплексном пространстве имеет собственный вектор: ведь по основной теореме алгебры всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Докажем, что для симметричного оператора A этот корень вещественный. (Мы обозначаем оператор и форму на комплексификации теми же символами, что и на исходном пространстве. Ясно, что характеристический многочлен оператора и характеристический многочлен его комплексификации равны — ведь определитель можно вычислить в произвольном базисе, а базис у нас тот же самый.) Пусть x — ненулевой собственный вектор с таким собственным значением (любой, если их несколько). Тогда

$$\lambda B_q(x,x) = B_q(Ax,x) = B_q(x,Ax) = \overline{\lambda} B_q(x,x).$$

Раз форма положительно определена, то $B_q(x,x) \neq 0$, и $\lambda = \overline{\lambda}$.

Теперь теорему мы докажем по индукции. Рассмотрим ненулевой вектор x, собственный для нашего симметричного оператора. Можно считать, что он имеет единичную длину (иначе его можно номрировать). Как и в прошлой лекции, изучим его ортогональное дополнение $V_1 = \langle x\rangle^\perp$. (Конечно, мы имеем в виду ортогональное дополнение относительно формы q.) Оказывается, если $y \in V_1$, то

$Ay \in V_1$, т. е. оператор A *сохраняет* подпространство V_1. Действительно,

$$B_q(Ay, x) = B_q(y, Ax) = B_q(y, \lambda x) = \lambda B_q(y, x) = 0.$$

Поэтому можно ограничить форму q и оператор A на подпространство V_1 и построить ортонормированный базис в том пространстве. После этого остаётся добавить к нему вектор x, чтобы получить ортонормированный базис во всём пространстве.

Упражнение 2. Проверьте, что матрица оператора в полученном базисе действительно диагональна.

Замечание 4. Для поиска нужного базиса на практике полезны следующие идеи.

1) В случае пары форм числа на диагонали второй матрицы суть корни многочлена $\det(Q - \lambda q)$. (Поэтому найти их можно, решая уравнение.)
2) Собственные векторы симметричного оператора, которые соответствуют различным собственным значениям, ортогональны. (Поэтому не обязательно каждый раз переходить к ортогональному дополнению, а надо лишь выбрать ортогональные базисы в подпространствах векторов с одним и тем же собственным значением.)
3) Специально строить самосопряжённый оператор как композицию двух отображений нет необходимости; достаточно взять матрицу формы Q в произвольном ортонормированном базисе формы q и понимать её как матрицу линейного оператора *в этом базисе.*

Второе утверждение совсем ясно: если x, y — собственные векторы с собственными значениями λ_1, λ_2, то

$$\lambda_1 B_q(x, y) = B_q(\lambda_1 x, y) = B_q(Ax, y) = B_q(x, Ay) = B_q(x, \lambda_2 y) = \lambda_2 B_q(x, y),$$

поэтому из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $B_q(x, y) = 0$.

Для доказательства второго утверждения обсудим вопрос, который важен сам по себе: как преобразуется матрица B билинейной формы f при замене базиса. Пусть $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ — два базиса, C — матрица перехода, x_i, x'_i — координаты в этих базисах, $B_e, B_{e'}$ — матрицы формы в этих базисах. Тогда для столбцов координат векторов v, w

$$x'^t B_{e'} y' = f(v, w) = x^t B_e y = (Cx')^t B_e (Cy') = (x'^t C^t) B_e (Cy') = x'^t (C^t B_e C) y',$$

откуда $B_{e'} = C^t B_e C$.

Если матрица формы q единичная, то первое из утверждений замечания 4 очевидно из доказательства теоремы. В противном случае надо заменить базис так, чтобы матрица стала единичной. Рассматриваемый многочлен тогда умножится на квадрат определителя матрицы перехода (это прямо следует из закона преобразования матриц, который нами только что выведен), поэтому его корни не изменятся. Утверждение доказано.

Наконец, третье утверждение можно объяснить так: в ходе доказательства теоремы мы выяснили, как положительно определённая форма осуществляет изоморфизм пространства и двойственного пространства. Если выбрать в пространстве ортонормированный базис, то скалярное произведение с k-ым базисным вектором есть функционал «k-ая координата», поэтому изоморфизм устроен совершенно явно, и наше утверждение очевидно.

Определение 1. Нахождение ортонормированного базиса для положительно определённой формы q (чаще всего стандартной евклидовой), в котором данная форма Q имеет диагональную матрицу, называют часто *приведением формы Q к главным осям.*