$O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : A^t \cdot A = A \cdot A^t = E\}$
$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$
$U(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : A^* \cdot A = A \cdot A^* = E\}$
$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$

Задача 0. Что такое $O(1)$, $SO(1)$, $U(1)$, $SU(1)$?
Задача 1. Покажите, что $SO(2)$ изоморфно $U(1)$.
Задача 2. Докажите, что $SU(2)$ гомеоморфно трехмерной сфере S^3.
Задача 3. Каждому повороту в $\mathbb{R}^3$ на угол меньший чем π можно инвариантно (т.е. способом, не зависящем от координат) поставить в соответствие некий вектор в $\mathbb{R}^3$. (Как это сделать?) С помощью этой конструкции установите гомеоморфизм между $SO(3)$ и $\mathbb{RP}^3$.
Задача 4. Покажите, что матрицы $\left\|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right\|$, $\left\|\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right\|$, $\left\|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right\|$

образуют $\mathbb{R}$-базис пространства M_2^+ эрмитовых 2×2-матриц с нулевым следом.
Задача 5. Для любого $g \in SU(2)$ рассмотрим отображение $\Phi_g^+ : h \mapsto ghg^{-1}$. Докажите, что $\Phi_g^+ : M_2^+ \to M_2^+$ — линейный оператор.
Задача 6. Докажите, что соответствие $g \mapsto \Phi_g^+$ является
a) гомоморфизмом $SU(2) \to GL(3)$;
b) гомоморфизмом $SU(2) \to O(3)$;
c) гомоморфизмом $SU(2) \to SO(3)$;
d) эпиморфизмом $SU(2) \to SO(3)$ и следовательно, $SO(3) = SU(2)/\ker\Phi$;
e) найдите ядро этого отображения.
Задача 7. Сопоставим каждому кватерниону $q = a + bi + cj + dk$ матрицу $A(q) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$

$$A(q) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi. \end{pmatrix}$$

Докажите, что $q \mapsto A(q)$ является мономорфизмом $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Чему равен образ множества $\{q : |q| = 1\}$?
Задача 8. Докажите, что $SU(2) \times SU(2)/\pm 1$ изоморфно $SO(4)$.
Указание. Рассмотрите отображение $x \mapsto pxq^{-1}$, $x \in \mathbb{H}$.
Задача 9. Для каждой симметрической матрицы $I \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим $O_I = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : I = XIX^t\}$. Верно ли, что O_I – группа? Сколько компонент связности в множестве O_I?
Задача 10. Покажите, что если в предыдущей задаче взять матрицу $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, то $O_I = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{a} \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

б) Докажите, что множество O_I не является группой, тогда и только тогда, когда в некотором базисе все ненулевые элементы матрицы формы I находятся в меньшей подматрице.