Задачи по алгебре к 5 ноября 2002

1. a) (Теорема Безу) Докажите, что если $f(x) \in K[x]$ и $f(\alpha) = 0$, где $\alpha \in K$, то $(x - \alpha) | f(x)$.
b) Покажите, что если $f(x) \in K[x]$, $\deg f(x) = n$, то f имеет не больше чем n различных корней.
c) Пусть $\mu_n(K) = \{ x \in K \mid x^n = 1 \}$. Покажите, что $|\mu_n(K)| \leqslant n$.
d) Пусть $G \subset K^*$ — конечная подгруппа мультипликативной группы поля. Докажите, что G — циклична (воспользуйтесь классификацией конечных абелевых групп).

2. Докажите, что если $[L : K] = 2$, то $L = K[\sqrt{a}]$, $a \in K$.

3. Найдите $[K(\alpha) : K]$ и $\mathrm{Irr}_\alpha^K(x)$, если a) $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$;
c) $K = \mathbb{F}_p$, α — образующая группы $\mu_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

4. Для расширений из предыдущей задачи найдите все поля L, такие что $K \subset L \subset K(\alpha)$.

5. Докажите, что 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$ и $\sqrt{30}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

6. Найдите группу $\mu(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(K)$ для полей a) $\mathbb{Q}(i)$; b) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$; c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; d) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$; e) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; f) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

7. a) Докажите, что поля $\overline{\mathbb{Q}}$ и $\overline{\mathbb{F}}_p$ счетны. b) Покажите, что поля $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, $\mathbb{C}$ попарно не изоморфны.
c) Проверьте, что $\overline{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}$.