А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Листок 3. Эволюционные уравнения

Задача 1. Рассмотрим пространство $J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$, координату вдоль $\mathbb{R}$ обозначим через t. Возьмем семейство элементов $f(t)\in\varkappa$ и рассмотрим на $J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$ векторное поле $D_t=\partial/\partial t+\mathfrak{Э}_{f(t)}$. Убедитесь, что $(n+1)$-мерное распределение, порожденное распределением Картана и полем D_t, вполне интегрируемо (в том же смысле, что и картановское распределение). Докажите, что семейство сечений $s(t)\in\Gamma(\pi)$ является решением эволюционной системы $u_t=f$ в том и только в том случае, когда образ отображения $j_\infty(s)\colon M\times\mathbb{R}\to J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$ является интегральным многообразием этого распределения.

Определение 1. *Симметрией* эволюционной системы $u_t=f$ называется вертикальное (и зависящее от t) векторное поле X на $J^\infty(\pi)\times\mathbb{R}$, сохраняющее введенное в предыдущей задаче распределение (т. е. если поле Y лежит в распределении, то и поле $[X,Y]$ лежит в нем).

Задача 2. Докажите, что поле X является симметрией если и только если $X=\mathfrak{Э}_{\varphi(t)}$ и $D_t(\varphi)=\ell_f(\varphi)$. Элемент φ называют *производящей функцией симметрии*.

Задача 3. Вычислите симметрии уравнения КдФ $u_t=6uu_x-u_{xxx}$, производящие функции которых зависят от производных не более чем третьего порядка. Вычислите потоки, отвечающие найденным симметриям (см. Задачу 10 в Листке 2).

Задача 4. Опишите алгебру всех симметрий уравнения Бюргерса $u_t=uu_x+u_{xx}$.

Определение 2. *Законом сохранения* эволюционной системы $u_t=f$ называется элемент $\eta\in\bar{H}^n/H^n(M)$, удовлетворяющий условию $D_t(\eta)=0$. (Здесь $H^n(M)$ — n-я группа когомологий де Рама базы M.)

Задача 5. Докажите, что закон сохранения η однозначно определяется элементом $\psi=\mathcal{E}(\eta)$ (*производящая функция закона сохранения*). Покажите, что $\psi\in\hat{\varkappa}$ является производящей функцией некоторого закона сохранения тогда и только тогда, когда $D_t(\psi)+\ell_f^*(\psi)=0$ и $\ell_\psi^*=\ell_\psi$.

Задача 6. Вычислите все законы сохранения уравнения Бюргерса $u_t=uu_x+u_{xx}$.

Задача 7. Определите действие симметрий на законы сохранения и опишите его в терминах производящих функций.

Задача 8. Рассмотрим оператор $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{(k)}(\hat{\varkappa},P)$ (т. е. $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\hat{\varkappa}\times\ldots\times\hat{\varkappa}\to P$ (k раз)). Докажите, что если $A(\mathcal{E}(\omega_1),\ldots,\mathcal{E}(\omega_k))=0$ для любых форм $\omega_i\in\bar{\Lambda}^n$, то $A=0$.

Задача 9. Пусть $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{(k)}(\hat{\varkappa},\bar{\Lambda}^n)$. Докажите, что если $A(\mathcal{E}(\omega_1),\ldots,\mathcal{E}(\omega_k))\subset\hat{d}\bar{\Lambda}^{n-1}$ для любых форм $\omega_i\in\bar{\Lambda}^n$, то $\operatorname{im}A\subset\operatorname{im}\hat{d}$.

Задача 10. Пусть $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{(k)}(\hat{\varkappa},\varkappa)$ и $\langle A(\mathcal{E}(\omega_1),\ldots,\mathcal{E}(\omega_k)),\mathcal{E}(\omega_{k+1})\rangle=0$ для любых форм $\omega_i\in\bar{\Lambda}^n$. Докажите, что $A=0$.

Задача 11. Покажите, что следующие два определения *функционального поливектора* эквивалентны:

1) Кососимметричное отображение $\alpha\colon\bar{H}^n\times\ldots\bar{H}^n\to\bar{H}^n$ (k раз) называется *функциональным k-вектором*, если существует такой оператор $A\in\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{(k-1)}(\hat{\varkappa},\varkappa)$, что $\alpha(\omega_1,\ldots,\omega_k)=\langle A(\mathcal{E}(\omega_1),\ldots,\mathcal{E}(\omega_{k-1})),\mathcal{E}(\omega_k)\rangle$.

2) Кососимметричное отображение $\alpha\colon \bar{H}^n \times \ldots \bar{H}^n \to \bar{H}^n$ (k раз) называется *функциональным k-вектором*, если
   (a) оно индуцировано некоторым дифференциальным оператором $\bar{\Lambda}^n \times \ldots \times \bar{\Lambda}^n \to \bar{\Lambda}^n$;
   (b) для любых $\omega_i \in \bar{\Lambda}^n$ отображение $\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, \cdot)\colon \bar{H}^n \to \bar{H}^n$ индуцировано некоторым эволюционным полем (зависящим от $\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$).

Задача 12. Убедитесь, что оператор A из предыдущей задачи определен однозначно и принадлежит $\mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(k-1)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$.

Определение 3. Мы будем отождествлять функциональные поливекторы с соответствующими кососимметричными $\mathscr{C}$-дифференциальными операторами. Поливектор, отвечающий оператору $A \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{skew}}_{(k-1)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$ будет обозначатся через $\{\cdot, \cdot, \ldots, \cdot\}_A\colon \bar{H}^n \times \bar{H}^n \times \ldots \times \bar{H}^n \to \bar{H}^n$. Множество функциональных k-векторов (понимаемых как операторы) обозначим через $\varkappa^{(k)}$. *Скобка Схоутена* $[\![\cdot, \cdot]\!]\colon \varkappa^{(k)} \times \varkappa^{(l)} \to \varkappa^{(k+l-1)}$ на функциональных поливекторах определяется с помощью формулы из Определения 9 в Листке 1. Бивектор $A \in \varkappa^{(2)}$ называется *гамильтоновым*, если $[\![A, A]\!] = 0$ или, равносильно, скобка $\{\cdot, \cdot\}_A$ удовлетворяет тождеству Якоби.

Обозначение. Пусть $A \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}_{(k)}(\hat{\varkappa}, P)$ и $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \hat{\varkappa}$. $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\ell_{A,\psi_1,\ldots,\psi_k}\colon \varkappa \to P$ определяется равенством

$$\ell_{A,\psi_1,\ldots,\psi_k}(\varphi) = \ell_A(\varphi)(\psi_1, \ldots, \psi_k), \qquad \varphi \in \varkappa.$$

Задача 13. Пусть $A \in \varkappa^{(k)}$ и $B \in \varkappa^{(l)}$. Докажите формулу

$$\begin{aligned}
[\![A, B]\!](\psi_1, \ldots, \psi_{k+l-2}) = &\sum_{\sigma \in S^{l-1}_{k+l-2}} (-1)^\sigma \ell_{B,\psi_{\sigma(1)},\ldots,\psi_{\sigma(l-1)}}(A(\psi_{\sigma(l)}, \ldots, \psi_{\sigma(k+l-2)})) + \\
&+ \sum_{\sigma \in S^{l}_{k+l-2}} (-1)^\sigma A(\ell^*_{B,\psi_{\sigma(1)},\ldots,\psi_{\sigma(l-1)}}(\psi_l), \psi_{\sigma(l)}, \ldots, \psi_{\sigma(k+l-2)}) - \\
&- (-1)^{(k-1)(l-1)}\Big(\sum_{\sigma \in S^{k-1}_{k+l-2}} (-1)^\sigma \ell_{A,\psi_{\sigma(1)},\ldots,\psi_{\sigma(k-1)}}(B(\psi_{\sigma(k)}, \ldots, \psi_{\sigma(k+l-2)})) + \\
&+ \sum_{\sigma \in S^{k}_{k+l-2}} (-1)^\sigma B(\ell^*_{A,\psi_{\sigma(1)},\ldots,\psi_{\sigma(k-1)}}(\psi_k), \psi_{\sigma(k)}, \ldots, \psi_{\sigma(k+l-2)})\Big),
\end{aligned}$$

где $\psi_i \in \hat{\varkappa}$.

Задача 14. Докажите следующие три эквивалентных критерия гамильтоновости оператора $A \in \varkappa^{(2)}$:

1) $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) - \ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1)) = A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1))$ при всех $\psi_1, \psi_2 \in \hat{\varkappa}(\pi)$;
2) выражение $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) + \frac{1}{2}A(\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2))$ симметрично относительно $\psi_1, \psi_2 \in \hat{\varkappa}(\pi)$;
3) $[\mathcal{Э}_{A(\psi)}, A] = \ell_{A(\psi)} \circ A + A \circ \ell^*_{A(\psi)}$ при всех $\psi \in \operatorname{im} \mathcal{E} \subset \hat{\varkappa}(\pi)$.

Задача 15. Пусть $n = 1$ и расслоение π одномерно (иными словами есть одна переменная x и одна u). Опишите все гамильтоновы операторы первого порядка.

Задача 16. В ситуации предыдущей задачи, докажите, что операторы $D_x^3 + (\alpha + \beta u)D_x + \beta u_x/2$, α, β — константы, являются гамильтоновыми.

Задача 17. Докажите, что в случае $n = 1$ операторы $A = 2LD_x + D_x(L)$, где L — симметричная матрица, элементами которой служат функции от x и u^j, являются гамильтоновыми.

З а д а ч а 18. Рассмотрим расслоения $\hat{\pi}\colon \hat{E} = E^* \otimes_M \Lambda^n(T^*M) \to M$ и $\Pi = \pi \oplus \hat{\pi}\colon E \oplus \hat{E} \to M$. Имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
J^\infty(\Pi) \arrow[dd, "\Pi_\infty"'] \arrow[dr, "\pi^*_\infty(\hat{\pi}_\infty)"] & \\
& J^\infty(\pi) \arrow[dl, "\pi_\infty"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Расслоение $\Pi_\infty\colon J^\infty(\Pi) \to M$ называется *кокасательным расслоением* к расслоению π. Покажите, что $\varkappa(\Pi) = \varkappa_\Pi \oplus \hat{\varkappa}_\Pi$, где $\varkappa_\Pi = \Gamma(\Pi^*(\pi))$ и что оператор $A\colon \hat{\varkappa}(\Pi) \to \varkappa(\Pi)$, $A(\psi, \varphi) = (\varphi, -\psi)$, $\varphi \in \varkappa_\Pi$, $\psi \in \hat{\varkappa}_\Pi$, является гамильтоновым. Выпишите бивектор $\{\cdot\,,\cdot\}_A$ в координатах.

З а д а ч а 19. Рассмотрим подкомплекс $\bar{\Lambda}^q_p(\Pi) \subset \bar{\Lambda}^q(\Pi)$ горизонтального комплекса де Рама на $J^\infty(\Pi)$, состоящий из форм, коэффициенты которых полиномиальны вдоль слоев расслоения $\pi^*_\infty(\hat{\pi}_\infty)$. Докажите, что n-я группа когомологий $\bar{H}^n_p(\Pi)$ такого подкомплекса изоморфна пространству симметричных и самосопряженных по каждому аргументу $\mathscr{C}$-полидифференциальных операторов: $\bar{H}^n_p(\Pi) = \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{self}}_{(*)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$ (однородному многочлену степени k при этом изоморфизме отвечает оператор от $k-1$ аргумента). Вычислите $\{\Delta_1, \Delta_2\}_A(\psi_1, \ldots, \psi_{k+l-2})$, где $\Delta_1 \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{self}}_{(k-1)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$, $\Delta_2 \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{self}}_{(l-1)}(\hat{\varkappa}, \varkappa)$, $\psi_i \in \hat{\varkappa}$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть A — гамильтонов оператор. Эволюционное поле $\mathit{Э}_\varphi$ с производящей функцией φ вида $\varphi = A(\mathcal{E}(\omega))$ называется *гамильтоновым* полем с гамильтонианом $\omega \in \bar{H}^n$. Обозначим это поле через $X_\omega = \mathit{Э}_{A(\mathcal{E}(\omega))}$.

З а д а ч а 20. Докажите равенства $X_{\omega_1}(\omega_2) = \{\omega_1, \omega_2\}_A$ и $X_{\{\omega_1, \omega_2\}_A} = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}]$.

О п р е д е л е н и е 5. Эволюционная система, соответствующая гамильтонову полю, т. е. имеющая вид $u_t = A(\mathit{Э}(\omega))$, $\omega \in \bar{H}^n$, называется *гамильтоновой*.

З а д а ч а 21. Докажите, что гамильтонов оператор A отображает производящие функции законов сохранения гамильтоновой системы в ее симметрии.

З а д а ч а 22. Убедитесь, что уравнение КдФ $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ обладает двумя гамильтоновыми структурами:

$$u_t = A_1(\mathcal{E}(u^3 + u_x^2/2)), \qquad A_1 = D_x,$$
$$u_t = A_2(\mathcal{E}(-u^2/2)), \qquad A_2 = D_x^3 - 4uD_x - 2u_x,$$

причем гамильтоновы операторы A_1 и A_2 образуют гамильтонову пару (см. Определение 11 в Листке 1). Докажите, что для КдФ можно реализовать схему Магри из Задачи 35 в Листке 1 (несмотря на нетривиальность гамильтоновых когомологий[*]). Именно, докажите, что КдФ обладает бесконечной серией законов сохранения, производящие функции которых находятся из рекуррентных соотношений $A_1(\psi_i) = A_2(\psi_{i-1})$, $\psi_0 = -1/2$. Покажите также, что $\{\omega_j, \omega_k\}_{A_1} = \{\omega_j, \omega_k\}_{A_2} = 0$, где $\mathcal{E}(\omega_i) = \psi_i$. Докажите, что и симметрии $\varphi_i = A_1(\psi_i) = A_2(\psi_{i-1})$, отвечающие найденным законам сохранения попарно коммутируют: $\{\varphi_j, \varphi_k\} = 0$.

[*]Как Вы думаете, чему они равны?