Высший Колледж Математики

Инварианты графов и узлов. Лекция 2. Инварианты Татта

1 Соотношения Татта

На прошлой лекции мы показали, что хроматический многочлен графа $\chi_\Gamma(c)$ удовлетворяет соотношению

$$\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c)$$

для любого ребра e в графе Γ. Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет W-*функцией* всякий инвариант графов f, удовлетворяющий соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma'_e) + f(\Gamma''_e) \tag{1}$$

для любого графа Γ и любого ребра e в нем. Изменение знака $-$ на $+$ не играет существенной роли: хроматический многочлен несложно модифицировать так, чтобы он удовлетворял соотношению (1). Для этого достаточно умножить его на $(-1)^{|V(\Gamma)|}$, где $|V(\Gamma)|$ — число вершин в Γ, т.е. рассмотреть модифицированный хроматический многочлен $\tilde{\chi}_\Gamma(c) = (-1)^{|V(\Gamma)|}\chi_\Gamma(c)$. Мы будем называть равенство (1) *соотношением Татта*.

Соотношение Татта мы будем рассматривать для графов с петлями и кратными ребрами. При этом в качестве ребра e можно брать только *звено* — ребро, не являющееся петлей. Как мы уже отмечали, хроматический многочлен можно определить и для таких графов, причем для выбранного продолжения соотношения (1) продолжают выполняться.

Помимо соотношений Татта хроматический многочлен удовлетворяет еще соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma_1)f(\Gamma_2) \tag{2}$$

в случае, если граф Γ является несвязным объединением графов Γ_1 и Γ_2. Татт называет W-функции, удовлетворяющие соотношению (2), V-*функциями*, а мы будем называть их также *инвариантами Татта*. Для того, чтобы равенства (1) и (2) имели смысл, необходимо, чтобы в области значений инварианта f были определены сложение и умножение. Поэтому мы всегда будем предполагать, что эта область значений представляет собой некоторое фиксированное коммутативное кольцо K. В случае хроматического многочлена кольцо K является кольцом многочленов от одной переменной c, $K = \mathbf{Z}[c]$. Наша задача на сегодня — доказать теорему Татта, дающую полное описание инвариантов Татта.

Пример 1.1 (сложность графа) Приведем еще один важный пример W-функции. *Остовным деревом* графа Γ называется поддерево в нем, содержащее все вершины графа Γ. *Сложностью* графа называется число остовных деревьев в нем. Обозначим сложность графа Γ через $C(\Gamma)$. Очевидно, что сложность несвязного графа равна нулю. Сложность графа удовлетворяет соотношению Татта. Действительно, все остовные деревья в графе Γ разбиваются на два класса: не содержащие данное ребро e и содержащие это ребро. Остовные деревья первого типа находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа Γ'_e, а остовные деревья второго типа — в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа Γ''_e.

Упражнение 1.2 Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины n?

Упражнение 1.3 Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

2 Теорема Татта

Оба графа в правой части соотношения Татта "проще" графа в его левой части: в них меньше звеньев. Поэтому, применяя соотношение Татта последовательно, мы можем свести вычисление любой W-функции к ее вычислению на графах без звеньев. Такое вычисление можно понимать как замену любого графа формальной линейной комбинацией графов без звеньев с целыми неотрицательными коэффициентами.

Всякий граф без звеньев является несвязным объединением одновершинных графов с несколькими петлями. Поэтому для задания W-функции достаточно определить ее на таких графах. Для задания V-функции достаточно определить ее на одновершинных графах с произвольным количеством петель: на несвязных объединениях таких графов значение V-функции будет произведением ее значений на связных компонентах.

Пример 2.1 Хроматический многочлен однозначно определяется условиями (1), (2) и тем, что на одновершинном графе без петель он равен t, а на одновершинном графе с одной и более петлей он равен нулю.

Сложность графа однозначно определяется условием (1) и тем, что она равна 1 на любом одновершинном графе и 0 на несвязном объединении двух и более одновершинных графов.

Принципиальное значение поэтому имеет следующий вопрос: верно ли, что W-функция может принимать *любое* значение на несвязном объединении одновершинных графов (соответственно, верно ли что V-функция может принимать любое значение на одновершинных графах). Другими словами, последовательность упрощений графа с помощью соотношения Татта всегда приводит к линейной комбинации графов без звеньев. Однако таких последовательностей много — верно ли, что результат не зависит от выбранной последовательности?

Например, для графа на рис. 1 есть две различные возможности выбрать ребро, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью приходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 2.2 (Татт) *Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует W-функция (соотв., V-функция), принимающая такие значения.*

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

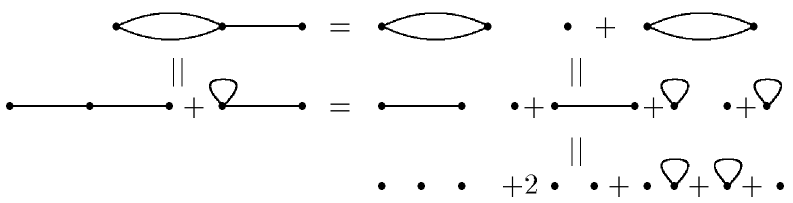

Рис. 1: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

3 Доказательство теоремы Татта

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной* V-функции. Так мы называем V-функцию со значениями в кольце многочленов $\mathbf{Z}[s_0, s_1, \ldots]$ от бесконечного числа переменных, такую что любую другую V-функцию со значением в произвольном кольце K можно получить подстановкой вместо переменных s_i подходящих элементов кольца K. Заметим, что элементами кольца $\mathbf{Z}[s_0, s_1, \ldots]$ являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных s_i с целыми коэффициентами.

Такую функцию можно построить следующим образом. Назовем *остовным подграфом* графа всякий его подграф, содержащий все его вершины. Тем самым, у каждого графа Γ ровно $2^{|E(\Gamma)|}$ остовных подграфа — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_\Gamma(s_0, s_1, \ldots) = \sum_{E' \subset E(\Gamma)} s_0^{i_0(\Gamma(E'))} s_1^{i_1(\Gamma(E'))} \ldots . \qquad (3)$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам E' множества ребер $E(\Gamma)$; через $\Gamma(E')$ обозначен соответствующий остовный подграф, а $i_m(\Gamma(E'))$ — число связных компонент в $\Gamma(E')$ с цикломатическим числом i_m.

Лемма 3.1 *Функция U_Γ является инвариантом Татта.*

Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции U_Γ.

Пример 3.2 Пусть $\Gamma = C_3$ — граф-треугольник. Тогда у него $2^3 = 8$ остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию U_{C_3} равен s_0^3. Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому $3s_0^2$. Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен $3s_0$. Наконец, сам граф C_3 состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен s_1. Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

Доказательство леммы 3.1 Фиксируем граф Γ и звено e в нем. Остовные подграфы графа Γ, не содержащие ребро e, находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа Γ'_e. При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения $i_0, i_1, \ldots$ совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа Γ, содержащие ребро e, находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа Γ''_e. При этом соответствии в каждом остовном подграфе в Γ''_e сжимается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его связных компонент. Лемма доказана.

Покажем теперь, что придавая различные значения переменным s_i, мы можем превратить U в V-функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Обозначим одновершинный граф с n петлями через X_n. Выпишем значения функции U на X_n. Имеем

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2;$$

вообще

$$U(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} s_j.$$

Из этих равенств мы можем выразить s_i:

$$s_0 = U(X_0), \quad s_1 = U(X_1) - U(X_0), \quad \ldots, \quad s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \quad \ldots.$$

Тем самым, для произвольного набора значений $U(X_j) = t_j$, мы можем восстановить значения s_i, а значит и значение функции U на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$

Теорема Татта доказана.

Проверим проведенное выше вычисление значения функции U на графе C_3. Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0}^3 + 3U_{X_0}^2 + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

4 Новые примеры инвариантов Татта

Результаты предыдущего раздела означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив произвольные значения вместо параметров s_i, либо указав значения инварианта на графах X_n, — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот, что получается при некоторых специальных подстановках.

Пример 4.1 (ребра и вершины) Если мы положим все $s_i = 1$, то получим V-функцию, принимающую на графе Γ значение $2^{|E(\Gamma)|}$. Если же положить $s_i = t$, то значение соответствующей V-функции будет $t^{|V(\Gamma)|}2^{|E(\Gamma)|}$.

Пример 4.2 (дихроматический многочлен и дихромат) Дихроматический многочлен $Q_\Gamma(t,z)$ зависит от двух переменных, и определяется подстановкой $s_k = tz^k$ в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе X_n равно

$$Q_{X_n}(t,z) = t(1+z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.

Подстановка $t = -c$, $z = -1$ превращает дихроматический многочлен в хроматический.

Дихромат графа Γ определяется формулой

$$\chi_\Gamma(x,y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} Q_\Gamma(x-1, y-1),$$

или

$$\chi_\Gamma(x,y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (x-1)^{b_0(E')} (y-1)^{b_1(E')}.$$

Пример 4.3 (потоковый многочлен) Подстановка $z = -\lambda$, $t = -1$ превращает дихроматический многочлен в *потоковый*, который мы обозначим через $F_\Gamma(\lambda)$:

$$F_\Gamma(\lambda) = Q_\Gamma(-1, -\lambda).$$

Объясним причину такого названия. Пусть R — коммутативное кольцо (не имеющее, вообще говоря никакого отношения к области K значений инварианта). *Цепью* над кольцом R в графе Γ называется формальная линейная комбинация ребер графа Γ с коэффициентами из R. Ориентируем ребра графа Γ произвольным образом. Тогда *границей* цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа Γ, в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется *циклом* над кольцом R, если у нее нулевая граница (т.е. коэффициенты границы при каждой вершине равны нулю). Понятие цикла в определении предыдущей лекции совпадает с понятием цикла над кольцом вычетов по модулю 2. При этом выбор ориентации графа не важен, так как в кольце $\mathbf{Z}_2$ всякий элемент совпадает со своим противоположным. Точно так же, выбор ориентации не влияет на определение цепей и циклов над любым кольцом, в котором всякий элемент совпадает со своим противоположным. При фиксированной ориентации це́пи над кольцом R образуют модуль над кольцом R с естественными операциями сложения и умножения на элемент кольца, а циклы — подмодуль в этом модуле.

Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид $a_1e_1 + a_2e_2$, где символами e_1, e_2 обозначены (ориентированные) ребра графа, а $a_1, a_2 \in R$. Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$ в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами $a_1 - a_2, a_2 - a_1$, если ориентации ребер противоположны. Если оба ребра ориентированы одинаково, то циклы имеют вид $ae_1 - ae_2$, а если ориентация ребер противоположна, то циклы имеют вид $ae_1 + ae_2$.

Предположим теперь, что в кольце R конечное число элементов; обозначим это число через λ.

Утверждение 4.4 *Значение многочлена $F_\Gamma(\lambda)$ при целом положительном значении λ равно по числу всюду ненулевых циклов над любым кольцом R с λ элементами в любой ориентации ребер графа Γ, умноженному на $(-1)^{b_1(\Gamma)+1}$.*

Всюду ненулевой цикл можно понимать как "поток" в графе, а его коэффициенты при ребрах как "величину тока" вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим прежде всего, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Ясно, что такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Проверим теперь, что число всюду ненулевых циклов над данным конечным кольцом R является V-функцией. Мультипликативность очевидна. Фиксируем граф Γ, ориентацию в нем и ребро $e \in \Gamma$. Для проверки соотношения Татта заметим, что всякому всюду ненулевому циклу в графе Γ''_e можно сопоставить цикл в графе Γ. Действительно, рассмотрим цепь в Γ, отвечающую выбранному циклу в Γ''_e, и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру e в Γ коэффициент, равный, с точностью до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру e. Эти два значения отличаются знаком, и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра e. Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в Γ''_e задает цикл в Γ'_e. Тем самым, число всюду ненулевых циклов в Γ равно разности числа всюду ненулевых циклов в Γ''_e и Γ'_e, т.е. после умножения на $(-1)^{b_1(\Gamma)+1}$ эта функция удовлетворяет соотношению Татта.

Осталось проверить совпадение этого числа с функцией F на графах X_n. Но мы знаем, что

$$F_{X_n}(\lambda) = -(1-\lambda)^n,$$

что после умножения на $(-1)^{b_1(V(\Gamma))+1} = (-1)^{n+1}$ в точности равно числу всюду ненулевых циклов в X_n над R, что и требовалось.

Пример 4.5 (эйлеровость) Вот V-функция со значениями в $\mathbf{Z}_2$, выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется *эйлеровым*, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение V-функции ε равным 1 на всех графах X_n. Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе Γ равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является *топологической* характеристикой — она не меняется при стягивании ребра. Поэтому если граф Γ эйлеров, то граф Γ''_e тоже эйлеров для любого ребра $e \in E(\Gamma)$, а граф Γ'_e неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф Γ неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра e, то и оба графа Γ'_e и Γ''_e неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра e, то оба графа Γ'_e и Γ''_e эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma'_e) + \varepsilon(\Gamma''_e).$$

Пример 4.6 (совершенные паросочетания) Остовный подграф графа Γ на $2n$ вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или 1-*фактором*, если он состоит из n ребер без общих концов. Например, в квадрате C_4 два совершенных паросочетания, а в полном графе K_4 их три. Рассмотрим V-функцию, значение которой на графе X_n равно

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n + 1).$$

Докажите, что значение этой V-функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа K_4 — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта U на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^6 + 5s_0^5 + 15s_0^4 + 4s_0s1 + 16s_0^3 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа K_4. Например, в множестве его ребер имеется $\binom{6}{3} = 20$ подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник C_3, объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из трех компонент связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен $4s_0s_1 + 16s_0^3$. Вычисление остальных слагаемых еще проще.

Воспользовавшись выражениями для s_n

$$\begin{array}{rclrcl} s_0 &=& t_0, & s_1 &=& t_1 - t_0, \\ s_2 &=& t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 &=& t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{array}$$

через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.