2001 год, осенний семестр
Математический анализ, 1 курс
Листок 2

Введем следующие обозначения. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности. Будем писать $a_n = o(b_n)$, если $\lim_{n\to\infty} |a_n|/|b_n| = 0$, и $a_n = O(b_n)$, если существует такое число C, что $|a_n| \leqslant C|b_n|$ для всех достаточно больших n. Если $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$, будем писать $a_n \sim b_n$. Наконец, если существуют такие положительные числа m и M, что $mb_n \leqslant a_n \leqslant Mb_n$ при всех достаточно больших n, то будем писать $a_n \eqsim b_n$ (это последнее обозначение менее общепринято).

Те же обозначения будут применяться не только для последовательностей, но и для функций (продумайте самостоятельно, что означает выражение наподобие «$f(x) \eqsim g(x)$ при $x \to 7$»).

Если для функции f удалось найти такую «более простую» функцию g, что $f(x) \sim g(x)$ (или хотя бы $f(x) \eqsim g(x)$) при $x \to a$, то говорят, что g — асимптотика для функции f при $x \to a$; аналогично для последовательностей.

В качестве «более простых» функций, измеряющих асимптотическую скорость роста или убывания, часто выбираются показательные, степенные и логарифмическая функции. Если $f(x) \eqsim x^\alpha$ при $x \to 0$, то говорят, что $f(x)$ имеет при $x \to 0$ порядок малости α.

1. Докажите неравенство $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$ при $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Указание: при $0 < x < \pi/2$ площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом при вершине x равна $\sin x/2$.

2. Найдите асимптотику (с точностью до $\sim$) функции а) $\sin x$ при $x \to 0$; б) $\sin(\pi \cdot 6^{-x}) - 1/2$ при $x \to 1$; в) $1 - \cos x$ при $x \to 0$.

3. Пусть $S(x)$ — площадь сегмента, стягивающего дугу x радиан в окружности радиуса 1. Найдите а) порядок малости б*) асимптотику с точностью до $\sim$ функции $S(x)$ при $x \to 0$.

4. Найдите а) порядок малости б*) асимптотику с точностью до $\sim$ функции $\int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ при $x \to 0$.

В задачах 5–11 найдите асимптотику последовательности a_n при $n \to \infty$ а) с точностью до $\eqsim$; б*) с точностью до $\sim$:

5. $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, где $\alpha > 0$.

6. $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n + 2001}$.

7. $a_n =$ количество чисел Фибоначчи, не превосходящих n.

Напоминание: последовательность чисел Фибоначчи определяется правилами $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n > 2$; как известно,

$$u_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \Big/ \sqrt{5}.$$

8. $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

9. $a_n =$ корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$, лежащий в промежутке $(n\pi, (n+1)\pi)$.

10. $a_n =$ корень уравнения $x^5 + nx - 1 = 0$.

11. a_n задана рекуррентными формулами: $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$.

Если уже доказано, что «простая» функция $f(x)$ является асимптотикой для функции $\varphi(x)$, можно поискать «второй член асимптотического разложения функции φ», то есть асимптотику разности $\varphi(x) - f(x)$.

12. Найти второй член асимптотического разложения для последовательностей и функций из задач:
а) 4; б) 5; в) 6; г) 9.