Задачи по алгебре от 1 ноября 2001 года.

Задача 1. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

также делится на 17.

Задача 2. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка составленного

1) из чисел 0 и 1; 2) 1 и -1; 3) -1,0 и 1.

Задача 3. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2001 & 2002 & 2003 & 2004 \\ 2002 & 2003 & 2004 & 2002 \\ 2001 & 2001 & 2001 & 1999 \\ 2001 & 2000 & 1998 & 1999 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0.1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0.1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0.1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. *Определитель Вандермонда.* Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

Задача 5. Доказать, что *циркулянт*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

равен $f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n)$, где $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — все корни степени n из единицы.

Указание. Умножьте этот определитель на определитель Вандермонда.

Задача 6. Найдите определитель *матрицы Фробениуса:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найдите определитель *матрицы Якоби:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Найдите определитель блочной матрицы (A и C — квадратные): $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Задача 9. Покажите, что если $A = (a_{ij})$, $\det A \neq 0$ и A_{ij} — алгебраическое дополнение к a_{ij}, то $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Задача 10. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — целочисленные вектора, составляющие базис $\mathbb{Z}^n$ над $\mathbb{Z}$ и $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n)$ — их координаты. Найдите все возможные значения $\det \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{pmatrix}$.

Задача 11. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — целочисленные вектора, $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n)$ — их координаты, причем $\left|\det \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ e_n^1 & \dots & e_n^n \end{pmatrix}\right| = 1$. Покажите, что $e_1, \dots, e_n$ — базис $\mathbb{Z}^n$ над $\mathbb{Z}$.

Задача 12. Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм колец. Покажите, что $\ker \varphi$ — идеал в A.

Определение 1. Пусть K — поле, $\varphi : \mathbb{Z} \to K$ — гомоморфизм колец, $\varphi(1) = 1$. Тогда $\ker \varphi = m\mathbb{Z}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Число m называется *характеристикой поля* K. **Обозначение:** $\operatorname{char} K$.

Задача 13. Пусть K — поле. Докажите, что $\operatorname{char} K$ — простое число или 0.

Задача 14. Пусть K — конечное поле. Докажите, что K состоит из p^n элементов, где $p = \operatorname{char} K$, а n — натуральное число.