Теорема Виета, алгоритм Евклида, китайская теорема об остатках

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$. Докажите, что $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i = -a_1$, $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = a_2$, $\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k = -a_3$, $\ldots$, $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_n$. (*теорема Виета*)

2. Дан многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Найдите многочлен, корнями которого являются: а) квадраты корней этого многочлена; б) кубы корней этого многочлена.

Пусть f и g — многочлены с комплексными коэффициентами. Говорят, что многочлен f *делится* на многочлен g, если $f = gh$, где h — некоторый многочлен (с комплексными) коэффициентами. Многочлен d называют *общим делителем* многочленов f и g, если f и g делятся на d. Общий делитель d многочленов f и g называют *наибольшим общим делителем* многочленов f и g, если он делится на любой общий делитель многочленов f и g.

3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$.

4. Докажите, что наибольший общий делитель определен однозначно с точностью до умножения на ненулевое число.

5. (*алгоритм Евклида*) Пусть $\deg f \geqslant \deg g$ ($\deg f$ — степень многочлена f). Пусть r_1 — остаток от деления f на g, r_2 — остаток от деления g на r_1, $\ldots$, r_{k+1} — остаток от деления r_{k-1} на r_k.

а) Докажите, что для некоторого n $r_{n+1} = 0$, т.е. r_{n-1} делится на r_n.

б) Докажите, что r_n — наибольший общий делитель многочленов f и g.

6. а) Докажите, что если d — наибольший общий делитель многочленов f и g, то найдутся такие многочлены a и b, что $d = af + bg$.

б) Пусть f и g многочлены с вещественными (соответственно, рациональными) коэффициентами. Докажите, что тогда если у многочленов f и g есть нетривиальный (т.е. отличный от константы) общий делитель с комплексными коэффициентами, то у них есть нетривиальный общий делитель с вещественными (соответственно, рациональными) коэффициентами.

Многочлены f и g называют *взаимно простыми*, если у них нет нетривиальных общих делителей.

7. Докажите, что многочлены f и g взаимно просты тогда и только тогда, когда у них нет общих корней.

Многочлен f с рациональными коэффициентами называют *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени с рациональными коэффициентами.

Корень x_0 многочлена $f(x)$ называют *кратным*, если $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

8. Докажите, что многочлен, имеющий кратный корень, не может быть неприводимым.

9. Докажите, что многочлен f не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда многочлены f и f' взаимно просты.

10. Докажите, что многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

11. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — взаимно простые многочлены, $g_1, \ldots, g_k$ — произвольные многочлены. Докажите, что тогда существует такой многочлен h, что $h(x) \equiv g_i \pmod{f_i}$, причем этот многочлен определен однозначно по модулю многочлена $f = f_1 \cdots f_k$. (*китайская теорема об остатках для многочленов*).

12. Разложим многочлен f над полем $\mathbb{C}$ на взаимно простые линейные множители: $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$. Докажите, что отображение $h \pmod f \mapsto \left(h \pmod{f_1^{m_1}}, \cdots, h \pmod{f_r^{m_r}}\right)$ задает канонический изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(f) \cong \mathbb{C}[x]/(f_1^{m_1}) \times \cdots \times \mathbb{C}[x]/(f_r^{m_r})$.