ЛЕКЦИЯ 7

Группа $GL_2(\mathbb{F}_q)$

Рассмотрим группу $GL_2(\mathbb{F}_q)$ невырожденных линейных преобразований двумерного векторного пространства над $\mathbb{F}_q$ или, другими словами, группу матриц 2×2 над $\mathbb{F}_q$ с ненулевым определителем.

Упражнение 1. Докажите, что $|GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$. Докажите, что $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

Вычислим количество классов сопряженности $GL_2(\mathbb{F}_q)$. Пусть $A \in GL_2(\mathbb{F}_q)$, тогда характеристический многочлен A равен $\lambda^2 - (\mathrm{Tr}A)\lambda + \mathrm{Det}A$. Возможны два случая: либо характеристический многочлен имеет два корня в $\mathbb{F}_q$, либо ни одного.

В первом случае матрица A приводится к жордановой нормальной форме над $\mathbb{F}_q$, что и определяет ее класс сопряженности. Возможны следующие варианты:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \ q-1 \text{ классов}; \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \ q-1 \text{ классов}; \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \ \frac{(q-1)(q-2)}{2} \text{ классов}.$$

Пусть теперь корни характеристического многочлена не принадлежат $\mathbb{F}_q$. Тогда они принадлежат единственному квадратичному расширению $\mathbb{F}_{q^2} \supset \mathbb{F}_q$.

Упражнение 2. Пусть $\theta : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}$ — отображение, переводящее x в x^q (частный случай автоморфизма Фробениуса). Докажите, что θ — автоморфизм. Докажите, что θ^2 — тождественное отображение. Докажите, что $\theta(x) = x$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathbb{F}_q$. Докажите, что если x — корень многочлена с коэффициентами в $\mathbb{F}_q$, то и $\theta(x)$ — корень этого многочлена.

Таким образом, в нашем случае характеристический многочлен определяется парой сопряженных (с помощью θ) корней, не лежащих в $\mathbb{F}_q$. Докажем, что все матрицы с данным характеристическим многочленом сопряжены. Пусть A — такая матрица, $v \in (\mathbb{F}_q)^2$ — некоторый вектор. Тогда, так как собственных векторов над $\mathbb{F}_q$ у A нет, v и Av образуют базис. Запишем матрицу A в этом базисе. Используя $A^2 - (\mathrm{Tr}A)A + \mathrm{Det}A = 0$, получим

$$(A^2v, Av) = (Av, v)\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}A & 1 \\ -\mathrm{Det}A & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеется еще $\frac{q^2-q}{2}$ классов сопряженности.

Мы построим часть представлений, используя идею старшего веса (см. конец предыдущей лекции).

Упражнение 3. Пусть в обозначениях предыдущей лекции $v \in V_\Gamma$ — вектор старшего веса. Докажите, что всякая верхнетреугольная матрица действует на вектор v умножением на скаляр.

Таким образом, $\mathbb{C}v$ — одномерное представление подгруппы B верхнетреугольных матриц. Мы опишем все представления $GL_2(\mathbb{F}_q)$, содержашие данное одномерное представление $B(\mathbb{F}_q)$ (*регулярная серия*). Они будут соответствовать по количеству смежным классам матриц с собственными значениями в $\mathbb{F}_q$. Затем опишем все представления, не имеющие "старшего веса" (*каспидальные представления*).

Но не следует думать, что все представления $B(\mathbb{F}_q)$ и меньших подгрупп — одномерны (как в $GL_2(\mathbb{C})$).

Задача 1. Опишите представления подгруппы $B_1 \subset B \subset GL_2(\mathbb{F}_q)$, состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Индуцированные представления

Пусть G — конечная группа, $H \subset G$ — подгруппа, ϱ — представление H в пространстве V. Мы строили регулярное представление как максимальное представление, порожденное одним вектором. Построим максимальное представление G, содержащее представление V подгруппы H.

Определение 1. Пусть $e, g_1, \ldots, g_s$ — представители левых смежных классов G/H ($G = H \cup g_1H \cup \cdots \cup g_sH$). *Индуцированным представлением* $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ назовем представление $\hat{\varrho}$ в пространстве, состоящем из $|G/H|$ экземпляров V:

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) = V \oplus g_1V \oplus \cdots \oplus g_sV,$$

где G действует так: если $v \in V$, $g = g_\alpha h$, то $\hat{\varrho}(g)$ переводит v в $g_\alpha(\varrho(h)v)$.

Действие G на V определяет действие на остальном пространстве. Чтобы вычислить действие на g_iV, положим $gg_i = g_\beta h'$. Тогда с необходимостью $\hat{\varrho}(g)$ переводит $g_iv = \hat{\varrho}(g_i)v$ в $g_\beta(\varrho(h')v)$.

Упражнение 4. Докажите, что это действительно представление ($\hat{\varrho}(g) \circ \hat{\varrho}(g') = \hat{\varrho}(gg')$).

Остается еще вопрос о зависимости определения от выбора представителей смежных классов. Дадим эквивалентное определение, обобщающее реализацию регулярного представления в пространстве функций на группе.

Определение 2. *Индуцированное представление* $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ — представление $\hat{\varrho}$ группы G в пространстве функций на группе со значениями в V, таких что $f(hg) = \varrho(h) \circ f(g)$. При этом элементы G действуют "заменой переменной" $(\hat{\varrho}(g)f)(x) = f(xg)$.

Упражнение 5. Докажите, что это действительно представление.

Предложение 1. *Определения 1 и 2 — эквивалентны.*

Действительно, векторам $v \in V$ соответствуют функции f_v, такие что $f_v(h) = \varrho(h)v$ при $h \in H$ и ноль иначе. Векторам $g_i v$ соответствуют функции $f_{g_i v}$, такие что $f_{g_i v}(hg_i^{-1}) = \varrho(h)v$ и ноль иначе.

Упражнение 6. Докажите, что построенное отображение — изоморфизм представлений.

Пример 1. Пусть $H = e$ — тривиальная подгруппа. Тогда $\mathrm{Ind}_e^G\mathbb{C} \cong \mathbb{C}[G]$ и определения 1 и 2 дают два определения пространства $\mathbb{C}[G]$.

Упражнение 7. Докажите, что если H — нормальная подгруппа G, а представление тривиально, то $\mathrm{Ind}_H^G\mathbb{C} \cong \mathbb{C}[G/H]$.

Предложение 2. *(Фробениус) Пусть H — подгруппа G, V — представление H, W — представление G. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W) \cong \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Res}_G^H W),$$

где $\mathrm{Res}_G^H W$ —пространство W, рассматриваемое как представление H.

Доказательство. Будем использовать определение 1. Каждый сплетающий оператор из $\mathrm{Ind}_H^G V$ в W можно ограничить на подпространство $V \subset \mathrm{Ind}_H^G V$. Полученный оператор коммутирует с действием H и, таким образом, принадлежит $\mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Res}_G^H W)$. Докажем, что построенное отображение — изоморфизм.

Пусть $F \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W)$. Предположим, что $F|_V = 0$. Тогда для $v \in V$ $F(g_i v) = \varrho_W(g_i)F(v) = 0$, значит, $F = 0$ и построенное отображение — вложение.

Докажем сюръективность. Пусть $F^0 \in \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{Res}_G^H W)$. Построим $F \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W)$, такой что $F|_V = F^0$. Для этого положим $F(g_i v) = \varrho_W(g_i)F^0(v)$.

Упражнение 8. Докажите, что построенный оператор F принадлежит $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G V, W)$.

■

Следствие 1. *Неприводимое представление W группы G входит в индуцированное представление $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ тогда и только тогда, когда в W как в представлении H есть подпредставление V. Кратность вхождения W в $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ равна при этом кратности вхождения V в $\mathrm{Res}_G^H(W)$.*

Следующий пример опирается это следствие и лекцию 5.

Пример 2. Пусть $G = S_n$, $H = S_{n-1}$ — подгруппа перестановок первых $n-1$ элементов, ϱ_Γ — представление H, связанное с диаграммой Γ из $n-1$ клетки. Тогда $\mathrm{Ind}_H^G(\varrho_\Gamma)$ — прямая сумма представлений $\varrho_{\Gamma'}$ по всем диаграммам Γ' из n клеток, содержащим Γ.

Задача 2. Пусть $G = D_n$ — группа самосовмещений правильного n–угольника, $H = \mathbb{Z}_n$ — подгруппа собственных преобразований. Найдите $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ для всех одномерных представлений χ группы $\mathbb{Z}_n$.

Исследуем пространство сплетающих операторов между индуцированными представлениями.

Теорема 1. *Пусть H и J — подгруппы G, ϱ и σ — представления этих подгрупп в пространствах U и V соответственно. Тогда пространство $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(\varrho), \mathrm{Ind}_J^G(\sigma))$ изоморфно пространству функций $F : G \to \mathrm{Hom}(U, V)$ (со значениями в пространстве* всех *операторов из U в V), таких что*

$$F(jgh) = \sigma(j) \circ F(g) \circ \varrho(h) \quad \text{для всех} \quad j \in J,\ h \in H. \tag{1}$$

Доказательство. Построим сначала пространство всех отображений из $\mathrm{Ind}_H^G(\varrho)$ в $\mathrm{Ind}_J^G(\sigma)$.

Лемма 1. *Пространство $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G(\varrho), \mathrm{Ind}_J^G(\sigma))$ изоморфно пространству функций $\varphi : G\times G \to \mathrm{Hom}(U, V)$, таких что*

$$\varphi(jg_1, hg_2) = \sigma(j) \circ \varphi(g_1, g_2) \circ \varrho(h)^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся определением 2 индуцированного представления. Пусть f — функция на G со значениями в U, такая что $f(hg) = \varrho(h) \circ f(g)$ для $h \in H$. Положим

$$T_\varphi f(g) = \sum_{r \in G} \varphi(g, r) \circ f(r).$$

Упражнение 9. Докажите, что если φ удовлетворяет (2), то T_φ — отображение в $\mathrm{Ind}_J^G(\sigma)$.

Осталось доказать, что отображение $\varphi \to T_\varphi$ — изоморфизм. Докажем, что оно вложение. Пусть φ удовлетворяет (2) и $T_\varphi = 0$. Рассмотрим функцию $f_{s,v}$, такую что $f_{s,v}(hs) = \varrho(h)v$ и ноль в остальных случаях. Тогда $(T_\varphi f_{s,v})(g) = |H|\varphi(g, s)v = 0$. В силу произвольности g и v это означает, что $\varphi = 0$, то есть инъективность построенного отображения.

Наконец заметим, что размерность пространства таких отображений φ равна $|G/H| \cdot |G/J| \cdot \dim U \cdot \dim V$, что совпадает с произведением размерностей индуцированных представлений. Значит, сопоставление $\varphi \to T_\varphi$ — изоморфизм. ■

Выясним, какие φ соответствуют сплетающим операторам. Это означает, что $T_\varphi \circ \hat{\varrho(g)} = \hat{\sigma(g)} \circ T_\varphi$ для всех $g \in G$, то есть

$$\sum_{r \in G} \varphi(gx, r) \circ f(r) = \sum_{r \in G} \varphi(g, r) \circ f(rx) = \sum_{r \in G} \varphi(g, rx^{-1}) f(r)$$

(второе равенство — замена переменной суммирования). Значит, в силу того, что $\varphi \to T_\varphi$ — изоморфизм, $\varphi(gx, r) = \varphi(g, rx^{-1})$. То есть $\varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1 g_2^{-1}, 1)$, и функция $F(g)$, фигурирующая в условии, определяется как $\varphi(g, 1)$. Условие (2) перепишется для F в виде (1). Подводя итог, определим действие F на $f \in \mathrm{Ind}_H^G(\varrho)$ по правилу

$$(T_F f)(g) = \sum_{r \in G} F(gr^{-1}) \circ f(r).$$

■

Упражнение 10. Докажите, что композиция сплетающего оператора из $\mathrm{Ind}_{H_1}^G(\varrho_1)$ в $\mathrm{Ind}_{H_2}^G(\varrho_2)$ со сплетающим оператором из $\mathrm{Ind}_{H_2}^G(\varrho_2)$ в $\mathrm{Ind}_{H_3}^G(\varrho_3)$ задается сверткой соответствующих функций на группе:

$$(f_2 \star f_1)(g) = \sum_{r \in G} f_2(r^{-1}) \circ f_1(rg).$$

Определение 3. Пусть H — подгруппа G, V — представление H. *Алгебра Гекке $\mathcal{H}(G, H, V)$, связанная с представлением V* — алгебра $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(V), \mathrm{Ind}_H^G(V))$ эндоморфизмов представления $\mathrm{Ind}_H^G(V)$.

Пример 3. Пусть $V = \mathbb{C}$ — тривиальное представление. Тогда по теореме 1 и упражнению 10 алгебра Гекке $\mathcal{H}(G, H, \mathbb{C})$ совпадает с ранее определенной алгеброй Гекке $\mathcal{H}(G, H)$.