ЛЕКЦИЯ 3

Количество неприводимых представлений

На прошлой лекции было доказано, что множество $Irrep_{\mathbb{C}}(G)$ комплексных неприводимых представлений конечной группы G с точностью до изоморфизма — конечно.

Теорема 1. *Количество элементов $Irrep_{\mathbb{C}}(G)$ равно количеству классов сопряженности группы G.*

Пример 1. Количество классов сопряженности конечной абелевой группы равно количеству ее элементов, что равно количеству представлений.

Упражнение 1. Проверьте утверждение теоремы для группы диэдра.

Доказательство.

Определение 1. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется *центральной*, если она постоянна на классах сопряженности группы G ($f(ghg^{-1}) = f(h)$).

Так как след зависит только от класса сопряженности матрицы, характеры представлений — центральные функции. Докажем, что характеры неприводимых представлений образуют базис в пространстве центральных функций.

Прежде всего, как доказано в предыдущей лекции, характеры ортогональны относительно естественного скалярного произведения на пространстве функций, следовательно они линейно независимы.

Для доказательство полноты этого множества векторов докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть f — центральная функция, ϱ—неприводимое представление в пространстве V. Тогда оператор*

$$\varrho(f) = \sum_{g\in G} f(g)\varrho(g) -$$

скаляр $\frac{|G|}{\dim V}\langle f, \chi_\varrho\rangle$.

Доказательство. Во первых, этот оператор — сплетающий:

$$\varrho(h)^{-1}\varrho(f)\varrho(h) = \sum_{g\in G} f(g)\varrho(h^{-1}gh) = \sum_{u\in G} f(huh^{-1})\varrho(u) = \varrho(f),$$

то есть $\varrho(f)\varrho(h) = \varrho(h)\varrho(f)$. Значит, по лемме Шура $\varrho(f)$ — скаляр. Вычислим его.

$$\operatorname{tr}\varrho(f) = \sum_{g\in G} f(g)\operatorname{tr}\varrho(g) = |G|\langle f, \chi_\varrho\rangle,$$

а $\varrho(f) = \frac{\operatorname{tr}\varrho(f)}{\dim V}$. ■

Предположим, характеры неприводимых представлений не образуют базис в пространстве центральных функций. Значит найдется ненулевая центральная функция f, ортогональная всем таким характерам. Тогда $\varrho(f) = 0$ для любого неприводимого представления, а значит, в силу теоремы Машке, для любого представления.

Но в регулярном представлении

$$(\varrho_R(f))(e_h) = \sum_{g\in G} f(g)e_{gh},$$

что равно нулю только если $f(g) = 0$ для всех $g \in G$.

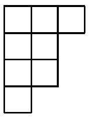
Задача 1. Докажите, что матричные элементы неприводимых представлений образуют базис в пространстве всех функций на конечной группе.

Комплексные представления симметрической группы

Напомню, что классы сопряженности в группе перестановок S_n соответствуют разбиениям перестановок на циклы. Таким образом, классы сопряженности нумеруются наборами натуральных чисел (длин циклов) $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_k$, таких что $f_1 + \cdots + f_k = n$.

Определение 2. Набор таких натуральных чисел $(f_, \ldots, f_k)$ называется *диаграммой Юнга* из n клеток.

Диаграмма Юнга изображается графически как таблица из k строк, длины которых равны f_i, например, диаграмма $(3, 2, 2, 1)$ избражается так:



Мы сопоставим каждой диаграмме Юнга из n клеток представление группы S_n, а именно, построим проектор на это представление из регулярного представления R.

Заметим, что на пространстве R определено два коммутирующих действия группы G. Одно из них стандартное, $\varrho_R(g)e_h = e_{gh}$, другое определено так: $\varrho'_R(g)e_h = e_{hg^{-1}}$. Поскольку эти действия коммутируют, любой оператор, составленный из ϱ' будет сплетающим.

Пример 2. Симметризация, $\Gamma = (n)$. Рассмотрим отображение из R в R

$$Sym = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varrho'_R(\sigma).$$

Легко проверить, что Sym — проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором

$$\sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma,$$

то есть на одномерное тривиальное представление.

Пример 3. Альтернирование, $\Gamma = (1, 1, \ldots, 1)$. Рассмотрим отображение из R в R

$$Alt = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\varrho'_R(\sigma).$$

Легко проверить, что Alt — проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) e_\sigma,$$

то есть на одномерное знаковое представление.

Пример 4. Пусть Γ — произвольная диаграмма Юнга из n клеток. Пронумеруем ее клеки числами от 1 до n, например так:

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

и обозначим нумерованную диаграмму T. Нумерация вводится для того, чтобы задать действие S_n на клетках диаграммы.

Пусть $\mathcal{A}_T \subset S_n$ — подгруппа перестановок, сохраняющих строки Γ. Ясно, что $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_T^1 \times \cdots \times \mathcal{A}_T^k$, где $\mathcal{A}_T^i \cong S_{f_i}$ — перестановки клеток i–той строки. Положим

$$a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_T} \varrho'_R(\sigma).$$

Заметим, что

$$\frac{a_T}{f_1! \ldots f_k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{f_i!} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_T^i} \varrho'_R(\sigma) -$$

произведение коммутирующих проекторов.

Упражнение 2. Докажите, что P — проектор на некоторое подпространство тогда и только тогда, когда $P^2 = P$. В частности, произведение коммутирующих проекторов — проектор (на что?).

Пример 5. Пусть T — нумерованная диаграмма, $\mathcal{B}_T \subset S_n$ — подгруппа перестановок, сохраняющих столбцы Γ. Положим

$$b_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\varrho'_R(\sigma).$$

Упражнение 3. Докажите, что b_T пропорционален проектору.

Определение 3. Оператор $c_T = b_T \circ a_T$, действующий из R в R, называется *симметризатором Юнга.*

Упражнение 4. Докажите, что если T и T' — разные нумерации диаграммы Γ, то c_T и $c_{T'}$ — сопряжены, а их образы — изоморфны как представления.

Теорема 2.

i) *$c_T \circ c_T = \mu c_T$, причем $\mu \neq 0$, то есть c_T пропорционален проектору.*
ii) *Образ c_T — неприводимое представление.*
iii) *Если T и T' соответствуют разным диаграммам Юнга, то образы c_T и $c_{T'}$ — неизоморфны.*

Упражнение 5. Докажите теорему для $n = 3$ вычислением.

Задача 2. Опишите явно представления группы S_4.